L'ÉPAISSEUR D'UN CHEVEU

On **ADMET** dans les premières parties de ce devoir le théorème suivant, qui sera démontré dans la dernière.

> **Théorème (Théorème de Cantor-Bernstein)** Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.

1 UNE BIJECTION DE $\mathbb{N}^2$ SUR $\mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Ce résultat justifie la bonne définition de l'application $(m,n) \overset{f}{\longmapsto} n + \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. On se propose de montrer que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

2) Proposer une illustration graphique de la bijectivité de f.

3) a) Exprimer $f(m,n+1)$ en fonction de $f(m+1,n)$, puis $f(n+1,0)$ en fonction de $f(0,n)$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

4) a) Montrer que pour tous $m,m',n,n' \in \mathbb{N}$: $\quad m'+n' \geqslant m+n+1 \quad \Longrightarrow \quad f(m',n') > f(m,n)$.

b) En déduire que f est injective sur $\mathbb{N}^2$.

2 UNE INJECTION DE $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ DANS $\mathbb{R}$

Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on appelle *indicatrice de A* et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathbb{1}_A(k) = \begin{cases} 1 & \text{si : } \quad k \in A \\ 0 & \text{si : } \quad k \notin A. \end{cases}$$

On pose alors pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{1}_A(k)}{3^{k+1}}$.

5) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la suite $\big(S_n(A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $S(A)$ sa limite.

6) Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose que : $\quad S(A) = S(B) \quad$ mais que : $\quad A \neq B$. Quitte à permuter A et B, on peut supposer que A n'est pas inclus dans B et noter p le plus petit entier naturel qui appartient à A sans appartenir à B.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant p+1$: $\quad \left| \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\mathbb{1}_A(k) - \mathbb{1}_B(k)}{3^{k+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2 \times 3^{p+1}}$.

b) En déduire une contradiction. Conclusion ?

3 Une injection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$

Pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n(x) = \lfloor 2^{n+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^n x \rfloor$.

7) Montrer que pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n(x) \in \{0,1\}$. On pose alors : $A_x = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n(x) = 1\}$.

8) **a)** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_x}(k)}{2^{k+1}} = x$.

b) En déduire que l'application $x \longmapsto A_x$ est injective sur $[0,1[$, puis qu'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

9) **a)** Montrer que l'application $(A,B) \longmapsto (2A) \sqcup (2B+1)$ est injective sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, où l'on a posé : $2A = \{2a \mid a \in A\}$ et $2B+1 = \{2b+1 \mid b \in B\}$.

b) Montrer enfin que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

Conclusion : il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents, il y a même autant d'éléments dans $]0,1[$ que dans $\mathbb{R}^2$, et au point où nous en sommes, il ne serait d'ailleurs pas plus difficile de montrer qu'il y a autant d'éléments dans $]0,1[$ que dans notre espace géométrique usuel $\mathbb{R}^3$. Bref, le monde n'est pas plus épais qu'un cheveu !

4 Preuve du théorème de Cantor-Bernstein

Cette dernière partie est facultative.

10) Soient E un ensemble et $\varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ une application croissante au sens de l'inclusion, i.e. telle que pour toutes parties A et B de E : $A \subset B \implies \varphi(A) \subset \varphi(B)$. On souhaite montrer que φ possède un point fixe (*théorème de Tarski*).

On note pour cela $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties A de E pour lesquelles : $A \subset \varphi(A)$ et M la réunion de toutes ces parties. Montrer que : $M \in \mathscr{M}$, puis que : $\varphi(M) = M$.

11) Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. On pose pour toute partie A de E : $\varphi(A) = E \setminus g\big(F \setminus f(A)\big)$.

a) Montrer que φ possède un point fixe, noté M.

b) Montrer que $f|_M$ est bijective de M sur $f(M)$ et que $g|_{F \setminus f(M)}$ est bijective de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$.

c) En déduire que E et F sont équipotents.