L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DES SŒURS COSINUS

Les fonctions cos et ch sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$: $\quad 2(\cos x)^2 = \cos(2x)+1 \quad$ et $\quad 2(\operatorname{ch} x)^2 = \operatorname{ch}(2x)+1$, mais ces deux propriétés sont-elles partagées par d'autres fonctions ? La réponse est oui, elles sont même particulièrement nombreuses et ce devoir se propose de vous présenter la famille au grand complet. On pose à cette fin :

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \mid \quad \forall x \geqslant 0, \quad 2f(x)^2 = f(2x)+1 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G} = \left\{ g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+) \mid \quad \forall x \geqslant 0, \quad g(2x) = 2g(x) \right\}.$$

Attention, les fonctions de $\mathscr{G}$ sont à valeurs positives.

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **8)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

1 Préliminaires

1) a) Déterminer les fonctions constantes de $\mathscr{F}$. Quelle valeur une fonction de $\mathscr{F}$ peut-elle prendre en 0 ?

b) Montrer que toute fonction de $\mathscr{F}$ est minorée par -1.

2) On note φ la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ sur $[-1,+\infty[$.

a) Montrer que $[0,1]$ est stable par φ et $[-1,0]$ stable par $-\varphi$.

On peut ainsi définir deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = v_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ et $v_{n+1} = -\varphi(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On **ADMET** — ou on le démontre, au choix ! — que $-\dfrac{1}{2}$ est le seul point fixe de $-\varphi$ sur $[-1,0]$.

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et calculer leurs limites respectives.

3) Soit $f \in \mathscr{F}$. On suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}_+$. Justifier l'existence du réel $\min\left\{ x \geqslant 0 \mid \quad f(x) = 0 \right\}$ et montrer qu'il est strictement positif.

En résumé, si une fonction de $\mathscr{F}$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$, elle y possède un premier zéro.

Pour préciser la valeur en 0 des fonctions étudiées, on notera désormais $\mathscr{F}(1)$ (resp. $\mathscr{F}\left(-\frac{1}{2}\right)$) l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}$ pour lesquelles $f(0) = 1$ (resp. $f(0) = -\dfrac{1}{2}$).

On notera en outre $\mathscr{F}_\infty$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{F}$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $a > 0$, $\mathscr{F}_a$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{F}$ qui s'annulent pour la première fois en a.

Les deux notations peuvent être utilisées conjointement. Par exemple, $\mathscr{F}_\infty(1)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+$ et pour lesquelles $f(0) = 1$.

4) a) Montrer que $f \circ g \in \mathscr{F}$ pour toutes fonctions $f \in \mathscr{F}$ et $g \in \mathscr{G}$.

b) En déduire pour tout $a > 0$ une bijection explicite simple de $\mathscr{F}_1(1)$ (resp. $\mathscr{F}_1\left(-\frac{1}{2}\right)$) sur $\mathscr{F}_a(1)$ (resp. $\mathscr{F}_a\left(-\frac{1}{2}\right)$).

2 Caractérisation de $\mathscr{F}_\infty$

Soit $f \in \mathscr{F}_\infty$.

5) a) Montrer que f ne prend pas la valeur -1 sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déuire que soit $f(x) = \varphi\big(f(2x)\big)$ pour tout $x \geqslant 0$, soit $f(x) = -\varphi\big(f(2x)\big)$ pour tout $x \geqslant 0$. Attention, la question est plus subtile qu'elle n'en a l'air.

6) On suppose que $f(x) = \varphi\big(f(2x)\big)$ pour tout $x \geqslant 0$.

a) Montrer que $f(x) \geqslant u_n$ pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, puis que f est minorée par 1.

b) Montrer que $f = \operatorname{ch} \circ g$ pour une certaine fonction $g \in \mathscr{G}$.

7) On suppose que $f(x) = -\varphi\big(f(2x)\big)$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que $v_{2n+1} \leqslant f(x) \leqslant v_{2n}$ pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que f est constante.

8) Quelle description des ensembles $\mathscr{F}_\infty(1)$ et $\mathscr{F}_\infty\left(-\frac{1}{2}\right)$ a-t-on ainsi obtenu ?

9) On s'attache dans cette question à décrire finement l'ensemble $\mathscr{G}$. On pose pour cela :

$$\mathscr{G}_{[1,2[} = \left\{ h \in \mathscr{C}\big([1,2[,\mathbb{R}_+\big) \ \big| \quad \lim_{x\to 2} h(x) = 2\,h(1) \right\}$$

et pour toute fonction $h \in \mathscr{G}_{[1,2[}$, on note $\widehat{h}$ la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\widehat{h}(0) = 0$ et $\widehat{h}(x) = 2^n h\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \left[2^n, 2^{n+1}\right[$.

a) Représenter graphiquement pour toute fonction $h \in \mathscr{G}_{[1,2[}$ la construction de $\widehat{h}$ à partir de h.

b) Soit $h \in \mathscr{G}_{[1,2[}$. Déterminer un réel M pour lequel $\left|\widehat{h}(x)\right| \leqslant Mx$ pour tout $x \geqslant 0$, puis montrer soigneusement que $\widehat{h}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

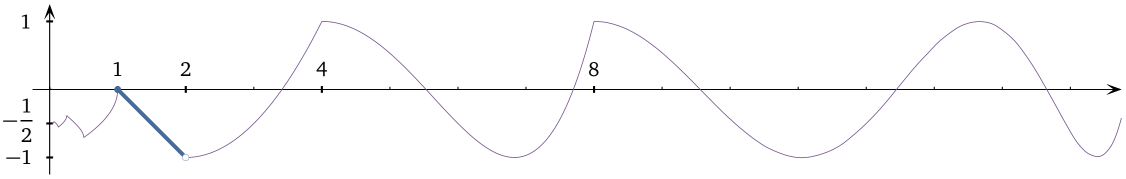
c) Montrer que $\widehat{h} \in \mathscr{G}$ pour toute fonction $h \in \mathscr{G}_{[1,2[}$, puis que l'application $h \longmapsto \widehat{h}$ est bijective de $\mathscr{G}_{[1,2[}$ sur $\mathscr{G}$. On explicitera sa réciproque.

3 Caractérisation de $\mathscr{F}_1\left(-\frac{1}{2}\right)$

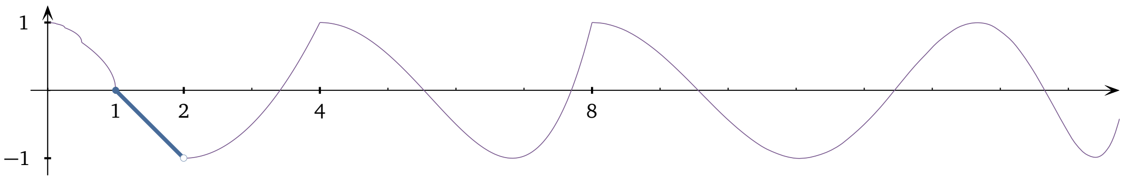
10) a) Soient $f \in \mathscr{F}_1\left(-\frac{1}{2}\right)$. Montrer que $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\varphi\big(f(x)\big)$, puis que $f(x) \in]-1,1[$ pour tout $x \in [0,2[$.

b) En déduire une bijection explicite de $\mathscr{F}_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ sur $\left\{ h \in \mathscr{C}\big([1,2[,]-1,1[\big) \ \big| \quad h(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} h(x) = -1 \right\}$.

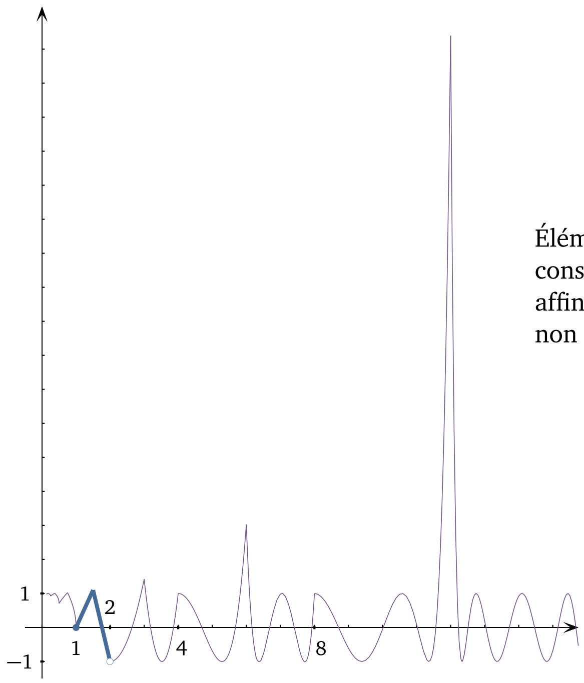
On définirait de même une bijection explicite de $\mathscr{F}_1(1)$ sur $\left\{ h \in \mathscr{C}\big([1,2[,]-1,+\infty[\big) \ \big| \quad h(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} h(x) = -1 \right\}$.



Élément de $\mathscr{F}_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ construit à partir de la fonction $x \overset{h}{\longmapsto} 1-x$ sur $[1,2[$



Élément de $\mathscr{F}_1(1)$ construit à partir de la fonction $x \overset{h}{\longmapsto} 1-x$ sur $[1,2[$



Élément de $\mathscr{F}_1(1)$
construit à partir d'une fonction
affine par morceaux
non majorée par 1