L'INÉGALITÉ ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE ET SES ALENTOURS

Pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ème}}$ de x* et on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel positif ou nul r pour lequel : $r^n = x$.
On **ADMET** que la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tous $x, y \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}.$$

On s'intéresse dans ce problème à deux notions différentes de moyenne et à l'écart qui les sépare.

Définition (Moyennes arithmétique et géométrique) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$, on appelle *moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$* le réel : $A(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, et *moyenne géométrique de $x_1, \ldots, x_n$* le réel : $G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$.

1) Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne aura-t-il subi sur ces trois années ?

On va dans un premier temps établir l'inégalité suivante :

Théorème (Inégalité arithmético-géométrique) Pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant A(x_1, \ldots, x_n)$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x - 1$.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ des réels de moyenne arithmétique m. Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure.

Dans la suite de ce problème : $n \geqslant 2$. On va tâcher d'estimer plus finement la différence $A(x_1, \ldots, x_n) - G(x_1, \ldots, x_n)$ pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$. On pose pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2$.

3) Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$. On pose : $a = A(x_1, \ldots, x_n)$, $g = G(x_1, \ldots, x_n)$ et $q = Q(x_1, \ldots, x_n)$.

a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i + x_j) = n(n-1)a$ et $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\sqrt{x_i x_j} = g^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

b) En déduire que g est la moyenne géométrique des réels $\sqrt{x_i x_j}$ pour lesquels : $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

c) Montrer, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels de la question **b)**, que : $a - g \geqslant \dfrac{q}{n-1}$.

4) **a)** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $a \leqslant b \leqslant c$. Montrer que : $|b| \leqslant \max\left\{|a|, |c|\right\}$, puis que : $b^2 \leqslant a^2 + c^2$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(x - ab)^2 \leqslant (x-a)^2 + (x-b)^2$.

5) Pour tous $y_1, \ldots, y_n > 0$, on pose : $D(y_1, \ldots, y_n) = n + \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(y_i - y_j)^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

a) Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}(y_i - y_j)^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1}(y_i - y_j)^2 = (y_n - y_{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\Big((y_i - y_n)^2 + (y_i - y_{n+1})^2\Big)$.

b) En déduire que :

$$D(y_1, \ldots, y_{n+1}) - D(y_1, \ldots, y_{n-1}, \underbrace{y_n y_{n+1}}_{\text{Produit}}) = (1 - y_n y_{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\Big((y_i - y_n)^2 + (y_i - y_{n+1})^2 - (y_i - y_n y_{n+1})^2\Big).$$

6) On souhaite montrer par récurrence sur n la proposition $\mathscr{P}_n$ suivante :

$$\forall y_1,\ldots,y_n > 0, \qquad y_1\ldots y_n = 1 \quad\Longrightarrow\quad D(y_1,\ldots,y_n) \geqslant 0.$$

a) Prouver la proposition $\mathscr{P}_2$.

Soit $n \geqslant 2$. On suppose la proposition $\mathscr{P}_n$ vraie. Soient $y_1,\ldots,y_{n+1} > 0$ des réels pour lesquels : $y_1\ldots y_{n+1} = 1$.

b) Justifier l'existence de deux entiers $i,j \in [\![1,n+1]\!]$ distincts pour lesquels : $y_i \leqslant 1 \leqslant y_j$.

Quitte à renuméroter $y_1,\ldots,y_{n+1}$, ce qui ne change rien à l'inégalité à démontrer si l'on y réfléchit bien, on peut supposer que : $y_n \leqslant 1 \leqslant y_{n+1}$.

c) Conclure.

7) Soient $x_1,\ldots,x_n > 0$. On pose : $a = A(x_1,\ldots,x_n)$, $g = G(x_1,\ldots,x_n)$ et $q = Q(x_1,\ldots,x_n)$. Montrer que : $a - g \leqslant q$ en appliquant le résultat de la question **6)** aux réels $\sqrt{\dfrac{x_1}{g}},\ldots,\sqrt{\dfrac{x_n}{g}}$.

En résumé, on a obtenu un encadrement de l'écart entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique.

Théorème (Inégalité arithmético-géométrique améliorée) Pour tous $x_1,\ldots,x_n > 0$: $\dfrac{q}{n-1} \leqslant a - g \leqslant q$ si on pose : $a = A(x_1,\ldots,x_n)$, $g = G(x_1,\ldots,x_n)$ et $q = Q(x_1,\ldots,x_n)$.