L'insoutenable plaisir des études de fonctions

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Dépasser, ne pas dépasser — telle est la question

On rappelle que pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$, donc après passage à l'exponentielle : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

On cherche désormais à déterminer les réels $\alpha > 0$ pour lesquels : $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On fixe pour cela $\alpha > 0$ et on note f_α la fonction $x \longmapsto (x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) **a)** Montrer proprement les égalités : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'_\alpha(x) = -\infty$.

c) Calculer et simplifier f''_α.

3) On suppose dans cette question que : $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$.

4) On suppose désormais que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

a) Montrer que f'_α s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel notée x_α, et que : $x_\alpha < \frac{\alpha}{1-2\alpha}$.

b) En déduire les variations de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $n \geqslant N$: $\mathrm{e} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$.

2 Une introduction à la convexité

Le concept de *fonction convexe* a été brièvement présenté en exercice. Ce problème en approfondit l'étude.

Définition **(Fonction convexe deux fois dérivable)** Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On dit que f est *convexe sur I* si f'' y est positive ou nulle.

Comme on l'a vu, le graphe de f est dans ce cas situé au-dessus de toutes ses tangentes. Formellement, cela signifie que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

1) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose f'' positive sur I.

a) Montrer que pour tous $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$: $(1-\lambda)x + \lambda y \in I$, puis que :

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

On pourra remarquer que le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en $a = (1-\lambda)x + \lambda y$.

b) Justifier l'interprétation suivante du résultat de la question **a)** : « Le graphe de f entre deux points est situé sous la corde qui les relie. »

L'inégalité de la question **1)a)** est en réalité la **DÉFINITION** classique de la convexité qu'on trouve partout. La définition que j'en ai donnée ci-dessus n'en est qu'une **CARACTÉRISATION** pour les fonctions deux fois dérivables. L'inégalité de la question **1)a)** offre plus de souplesse car elle ne requiert pas la moindre hypothèse de dérivabilité.

La convexité a son envers, qu'on appelle *concavité*. L'idée est simple, une fonction deux fois dérivable f est *concave* si $-f$ est convexe. Une fonction deux fois dérivable est ainsi concave si sa dérivée est **NÉGATIVE** ou nulle, son graphe est situé **SOUS** toutes ses tangentes et l'inégalité de la question **1)a)** est encore vraie mais dans l'autre sens. Par exemple, la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour tout $x > 0$: $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$.

On se propose à présent de démontrer une généralisation fondamentale du résultat de la question **1)a)**.

Théorème (Inégalité de Jensen) Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable convexe, $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ des réels pour lesquels : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors : $\displaystyle f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

L'inégalité de Jensen est aussi vraie pour les fonctions concaves, mais dans l'autre sens.

2) Soient I un intervalle. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I$.

3) On reprend dans cette question les notations du théorème de Jensen et on suppose : $n \geqslant 2$ et $\lambda_n < 1$.
Montrer que : $\displaystyle f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leqslant (1-\lambda_n) f\left(\frac{1}{1-\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k\right) + \lambda_n f(x_n)$.

4) Démontrer l'inégalité de Jensen.

On va maintenant donner deux applications de l'inégalité de Jensen.

5) Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$: $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$ (*inégalité arithmético-géométrique*) en exploitant la fonction logarithme.

6) **a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
b) En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$.