L'INTÉGRALE DE DIRICHLET

On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème (Intégrale de Dirichlet) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, résultat que l'on note aussi : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

0) Une généralisation du théorème d'intégration par parties :

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1\big(]a,b],\mathbb{R}\big)$. On suppose que les fonctions fg, $f'g$ et fg' possèdent des limites finies en a.

a) Montrer que la fonction fg est alors prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ tout entier.

b) En déduire l'égalité : $\int_a^b fg' = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b f'g$.

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose : $I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1) Justifier la bonne définition de I sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Appliquer le résultat de la question **0)** aux fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \sin^2(2nx)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire l'égalité : $I(2n\pi) = \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2nt)}{t^2}\,dt$.

3) Montrer que pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\operatorname{cotan} t \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sin t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $m_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotan}^2 t\ \sin^2(nt)\,dt$ et $M_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,dt$.

4) Justifier la bonne définition de m_n et M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) a) Simplifier : $M_{n+2} - 2M_{n+1} + M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire une expression explicite de M_n en fonction de n.

b) Simplifier : $M_n - m_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire une expression explicite de m_n en fonction de n.

6) a) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de : $\lim_{n\to+\infty} I(2n\pi)$.

b) Prouver enfin proprement l'existence de : $\lim_{x\to+\infty} I(x)$ et préciser sa valeur.