L'intégrale de Dirichlet

On souhaite établir notamment le résultat suivant :

Théorème **(Intégrale de Dirichlet)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, résultat que l'on note aussi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

1) Justifier pour tout $x \geqslant 0$ l'existence des intégrales : $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$.

b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra s'intéresser aux intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, k décrivant $\mathbb{N}^*$.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

3) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \,]0,\pi[$: $\displaystyle 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}$.

b) Justifier l'existence de : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer cette intégrale.

4) a) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\mathbb{R}\right)$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).

b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t - t}{t\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tout entier.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t$.

5) a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Attention, x est un paramètre réel ici, pas un entier.

b) Comment expliquer intuitivement que des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, l'une soit finie et l'autre infinie ?

6) a) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbb{R}_+$ tout entier.

b) En déduire l'existence et la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.