La continuité, en veux-tu, en voilà

Les deux exercices de ce devoir sont indépendants.

1 Une équation fonctionnelle

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$: $f\left(x^2+\frac{1}{4}\right) = 1 - f(x)$. On note φ la fonction $x \longmapsto x^2 + \frac{1}{4}$.

1) a) Montrer que l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par φ.

b) Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

c) En déduire que f est constante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2) a) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est stable par φ et que $\varphi|_{\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$ est bijective de cet intervalle sur lui-même.

b) Adapter astucieusement le travail de la question **1)** pour montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, de valeur à préciser.

2 Convergence simple, convergence uniforme et deuxième théorème de Dini

On étudie les suites de nombres en MPSI, puis les suites de fonctions en deuxième année. Plusieurs modes de convergence des suites fonctions sont alors présentés, dont les deux suivants.

Définition (Convergence simple, convergence uniforme) Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f, ce qu'on note : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVS}}{\longrightarrow}} f$, si pour tout $x \in I$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f, ce qu'on note : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVU}}{\longrightarrow}} f$, si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

1) Avec les notations de la définition, montrer que si : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVU}}{\longrightarrow}} f$, alors : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVS}}{\longrightarrow}} f$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n\left(2^{-n}\right) = 1$ et pour tout $x \in [0,1] \setminus \left\{2^{-n}\right\}$: $f_n(x) = 0$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $x \longmapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f à préciser.

b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}_+$ en fonction de α.

4) Avec les notations de la définition, on fait l'hypothèse que : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVU}}{\longrightarrow}} f$ et que f_n est continue sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est alors elle aussi continue sur I. On pourra commencer par décomposer $f(x) - f(a)$ en la somme de trois quantités intéressantes pour tous $x, a \in I$.

On souhaite maintenant établir le résultat suivant. Évidemment, il existe aussi un premier théorème de Dini !

Théorème (Deuxième théorème de Dini) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On fait trois hypothèses :

— $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$.

— f_n est croissante sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— f est continue sur $[a, b]$.

Dans ce cas : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$.

5) On se place dans le contexte du théorème de Dini. On souhaite montrer que : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$. On fixe pour cela $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que f est croissante sur $[a, b]$.

On pose à présent pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$: $x_{n,k} = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$.

b) On fait l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ pour lequel : $\left|f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})\right| \geqslant \varepsilon$. Exhiber une contradiction en exploitant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

D'après **b)**, on peut se donner un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$: $\left|f(x_{N,k+1}) - f(x_{N,k})\right| < \varepsilon$.

c) Montrer que pour tous $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$: $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon + \max\limits_{0\leqslant k\leqslant N} \left|f_n(x_{N,k}) - f(x_{N,k})\right|$.

d) Conclure.

6) Soit $R > 0$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ sur $[0, R]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, R]$ vers une fonction à préciser.