La dérivabilité dans tous ses états

Les quatre exercices suivants sont indépendants.

1 Fonctions plateaux

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si : } x > 0 \\ 0 & \text{si : } x \leqslant 0. \end{cases}$ La fonction f est bien sûr de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. On va prouver qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un polynôme P_n de degré à préciser pour lequel pour tout $x > 0$:

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la limite : $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x)$, puis conclure.

2) On note g la fonction $x \longmapsto f(x)\, f(1-x)$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de son graphe.

3) Continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g possède des primitives d'après le théorème fondamental du calcul intégral — momentanément **admis**. On note G son unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) Montrer que : $G(1) > 0$, puis étudier les variations de la fonction $x \overset{H}{\longmapsto} \dfrac{G(x)}{G(1)}$ sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de son graphe.

c) En déduire l'existence d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ et de valeur 1 sur $[-1, 1]$. De telles fonctions, dites *fonctions plateaux*, sont d'une grande utilité en analyse et vous en rencontrerez peut-être quelques-unes en spé.

2 Sommes de sinus

1) Une somme de fonctions périodiques — pas forcément de mêmes périodes — est-elle toujours périodique ? Justifier.

On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ avec : $0 < \omega_1 < \ldots < \omega_n$, ainsi que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ et $A_1, \ldots, A_n > 0$.
La fonction $x \longmapsto \sum\limits_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$ s'annule alors une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.
En résumé, toute somme finie de signaux sinusoïdaux s'annule une infinité de fois.

On note f la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ' aussi s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

3) On suppose dans un premier temps que : $A_1 \geqslant \sum\limits_{k=2}^n A_k$.

a) En quels points la fonction $x \longmapsto \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$ est-elle maximale (resp. minimale) ?

b) En déduire que f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

4) On traite à présent le cas général.

a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner un exemple de primitive $p^{\text{ème}}$ de f sur $\mathbb{R}$.

b) Se ramener à la situation de la question **1)** en exploitant astucieusement le résultat de la question **a)**, puis conclure.

3 Un soupçon d'epsilons, une pointe de Rolle

On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et que la fonction $x \longmapsto x^2 f''(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors : $\lim\limits_{x \to 0} x f'(x) = 0$.

On note M un majorant de $x \longmapsto \left|x^2 f''(x)\right|$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que pour tous $x > 0$ et $a \in]0,1[$, il existe un réel $c \in]ax, x[$ pour lequel :

$$f(ax) = f(x) - (1-a)xf'(x) + \frac{(1-a)^2}{2}\, x^2 f''(c).$$

On pourra remplacer dans le résultat a par une variable et s'intéresser à une certaine fonction.

2) En déduire que pour tous $x > 0$ et $a \in]0,1[$: $\left|xf'(x)\right| \leqslant \dfrac{\left|f(x)\right| + \left|f(ax)\right|}{1-a} + \dfrac{1-a}{2a^2}\, M$.

3) Conclure proprement.

4 Puissances entières

Ce dernier exercice est facultatif. On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si n^α est entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\alpha \in \mathbb{N}$.

1) Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, on note Δf la fonction $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis on étend cette définition par récurrence en notant $\Delta^{p+1} f$ la fonction $\Delta(\Delta^p f)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Montrer que pour tous $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$: $\Delta^p f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} f(x+k)$.
- **b)** Montrer que pour tous $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $(\Delta^p f)' = \Delta^p(f')$.
- **c)** Montrer que pour tous $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$: $\exists\, c > 0/ \quad \Delta^p f(x) = f^{(p)}(c)$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose n^α entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par l'absurde en supposant que : $\alpha \notin \mathbb{N}$ et on note f la fonction $x \longmapsto x^\alpha$.

- **a)** Montrer que $f^{(\lfloor \alpha \rfloor + 1)}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, mais qu'au contraire $f^{(\lfloor \alpha \rfloor + 2)}$ y est strictement négative.
- **b)** En déduire que la suite $\left(\Delta^{\lfloor \alpha \rfloor + 1} f(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, puis conclure.