# La suite de Sylvester et son au-delà

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** et **2)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

## 1 La suite de Sylvester

On appelle *suite de Sylvester* la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_0 \ldots s_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose alors $t_n = s_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1)** **a)** Montrer que $s_n$ est un entier supérieur à $n+2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1 \quad$ et en déduire une expression analogue de $t_{n+1}$ en fonction de $t_n$.

**c)** Simplifier $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s_k}$.

**2)** On pose $q_n = \dfrac{\ln t_n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ pour lesquels $p \geqslant n$ : $\quad q_p = q_n + \displaystyle\sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{4t_k^2}\right)$.

**b)** En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif $q_\infty$.

**c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad 0 \leqslant q_\infty - q_n \leqslant \dfrac{1}{4t_n^2\, 2^n}$.

On pose $\alpha = \mathrm{e}^{q_\infty}$. Pour information, $\alpha$ vaut $1,5979$ à $10^{-4}$ près.

**d)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad 0 \leqslant \alpha^{2^n} - t_n \leqslant t_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4t_n^2}} - 1\right), \quad$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\alpha^{2^n} - s_n\right)$.

## 2 Par-delà Sylvester

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels pour laquelle $a_0 \geqslant 2$ et $a_{n+1} \geqslant a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Objectif de cette partie : justifier l'existence du réel $\ell = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$ et montrer qu'il est rarement rationnel.

On pose $x_n = a_0 \ldots a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on note $y_n$ l'entier pour lequel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{y_n}{x_n}$ après mise au même dénominateur.

**3)** **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad a_n \geqslant s_n$.

**b)** Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

On pose à présent $u_n = \dfrac{y_n}{x_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}$ et $v_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**4)** **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad v_n - u_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

**c)** En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note $\ell$ leur limite commune.

**5)** On suppose dans cette question que $\ell$ est rationnel, i.e. que $\ell = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que la suite $(px_n - qy_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire.

**b)** En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \geqslant N$.

**6)** Montrer que pour tous $p, q \geqslant 2$ entiers, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{q^k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{q^k}}$ est un irrationnel.