LE PARADOXE DE PENNEY

Soit $n \geqslant 3$. On s'intéresse dans tout ce problème à une suite finie de n lancers d'une pièce équilibrée autour duquel deux joueurs J et J' s'affrontent. Le joueur J l'emporte si la combinaison PILE-PILE-FACE apparaît avant la combinaison FACE-PILE-PILE. Au contraire, le joueur J' l'emporte si la combinaison FACE-PILE-PILE apparaît avant la combinaison PILE-PILE-FACE. Bien sûr, il est possible qu'aucun joueur ne gagne, mais les n lancers sont joués quoi qu'il arrive.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

1 FACE-PILE-PILE VAUT MIEUX QUE PILE-PILE-FACE

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note D_k l'événement « Il n'apparaît jamais deux PILES consécutifs lors des k premiers lancers » et d_k sa probabilité.

a) Calculer d_1, d_2 et d_3.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n-2]\!]$: $\quad d_{k+2} = \dfrac{1}{2}\, d_{k+1} + \dfrac{1}{4}\, d_k$.

c) En déduire que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\quad d_k \leqslant \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}$.

2) On note à présent T le rang à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant — noté $+\infty$ si aucun des deux joueurs ne gagne.

a) Calculer $P(T=1)$, $P(T=2)$ et $P(T=3)$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![2,n]\!]$: $\quad P(T>k) = d_k + \dfrac{1}{2^k}$. $\quad$ En déduire $P(T \neq +\infty)$. Quelle interprétation ce résultat a-t-il lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$?

3) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note J_k l'événement « Le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du $k^{\text{ème}}$ lancer » et j_k sa probabilité.

a) Que valent j_1 et j_2 ? Montrer que pour tout $k \in [\![3,n]\!]$: $\quad j_k = \dfrac{1}{2^k}$.

b) Calculer la probabilité de l'événement G « Le joueur J est déclaré gagnant ».

c) En déduire la probabilité de l'événement G' « Le joueur J' est déclaré gagnant ».

d) Montrer que si : $\quad n \geqslant 4, \quad$ alors : $\quad P(G) < P(G')$.

2 FACE-PILE-PILE ET PILE-PILE-FACE ONT LES MÊMES TEMPS D'ATTENTE

On note X (resp. X') le rang à l'issue duquel la combinaison PILE-PILE-FACE (resp. FACE-PILE-PILE) apparaît pour la première fois — noté $+\infty$ si aucun des deux joueurs ne gagne — et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\quad p_k = P(X \leqslant k) \quad$ et $\quad p'_k = P(X' \leqslant k)$. Par exemple, si on obtient : $\quad$ PILE-FACE-PILE-PILE-PILE-FACE-..., $\quad$ alors : $\quad X = 6 \quad$ et $\quad X' = 4$.

Pour tout $k \in [\![3,n]\!]$, on note en outre C_k (resp. C'_k) l'événement « La combinaison PILE-PILE-FACE (resp. FACE-PILE-PILE) est apparue au cours des $(k-2)^{\text{ème}}$, $(k-1)^{\text{ème}}$ et $k^{\text{ème}}$ lancers ».

4) a) Montrer que les événements C_k et C'_k sont équiprobables pour tout $k \in [\![3,n]\!]$.

b) Montrer que les événements C_k, C_{k+1} et C_{k+2} (resp. C'_k, C'_{k+1} et C'_{k+2}) sont deux à deux incompatibles pour tout $k \in [\![3,n-2]\!]$.

c) En déduire que : $\quad p_3 = p'_3, \quad p_4 = p'_4 \quad$ et $\quad p_5 = p'_5$.

5) Soit $k \in [\![3,n-3]\!]$.

a) Montrer que l'événement $\{X \leqslant k+3\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X \leqslant k+2\}$ et $\{X > k+2\} \cap C_{k+3}$.

b) En déduire : $\quad p_{k+3} = p_{k+2} + \dfrac{1-p_k}{8}$.

On ADMET — car le raisonnement est le même — que pour tout $k \in [\![3,n-3]\!]$: $\quad p'_{k+3} = p'_{k+2} + \dfrac{1-p'_k}{8}$.

6) Montrer que les variables aléatoires X et X' ont même loi.

La synthèse des résultats des parties **1** et **2)** est appelée le *paradoxe de Penney*, du nom de l'ingénieur américain qui l'a le premier proposé en 1969. En résumé, pour : $\quad n \geqslant 4, \quad$ alors que le jeu de la partie **1** est inéquitable, les temps d'attente des combinaisons FACE-PILE-PILE et PILE-PILE-FACE suivent exactement la même loi !