Le produit de cinq entiers consécutifs n'est jamais un carré

1) **Préliminaire :** Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec : $a > b$. Montrer que si : $a^2 - b^2 \leqslant 4$, alors : $(a, b) = (2, 1)$ — et donc : $a^2 - b^2 = 3$.

On se donne à présent cinq entiers naturels non nuls consécutifs n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 dans l'ordre : $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$. On va montrer que le produit $n_1n_2n_3n_4n_5$ n'est pas un carré (d'entier), i.e. que : $\sqrt{n_1n_2n_3n_4n_5} \notin \mathbb{N}$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel : $n_1n_2n_3n_4n_5 = k^2$.

2) **a)** Montrer que 2 et 3 sont les seuls nombres premiers qui peuvent diviser à la fois deux des nombres n_1, n_2, n_3, n_4, n_5.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, n_i peut être écrit sous la forme : $n_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} m_i^2$ pour certains $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$ et $m_i \in \mathbb{N}$.

3) On suppose dans cette question que l'un des entiers n_2, n_3, n_4, disons n_i, est divisible par 6. Montrer que n_{i-1} et n_{i+1} sont des carrés, puis conclure.

4) On suppose dans cette question qu'aucun des entiers n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 n'est divisible par 6. En considérant $n_1 - 1$ et $n_5 + 1$, montrer que n_1 et n_5 sont des carrés, puis conclure.

5) On suppose dans cette question que n_1 est divisible par 6.

a) Montrer que n_3 (resp. n_5) est soit un carré, soit le double d'un carré. Que peut-on dire de n_2 ?

b) Conclure.

6) On suppose dans cette question que n_5 est divisible par 6. Conclure en adaptant la preuve de la question **5)** sans rentrer dans tous les détails.