Le théorème de Block-Thielmann

On appelle *suite commutante* toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg(P_n) = n \qquad \text{et} \qquad \forall m,n \in \mathbb{N}^*, \quad P_m \circ P_n = P_n \circ P_m.$$

Objectif du problème : déterminer l'ensemble des suites commutantes (*théorème de Block-Thielmann*).

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$, appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev* et de degré n.

1) Vérifier que les suites $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont commutantes.

2) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré m et de coefficient dominant α et $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré n et de coefficient dominant β. Montrer que si : $P \circ Q = Q \circ P$, alors : $\beta^{m-1} = \alpha^{n-1}$.

3) Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. On pose : $\mathscr{C} = \Big\{P \in \mathbb{R}[X] /\ \ P \text{ est non constant et } P \circ \big(X^2+p\big) = \big(X^2+p\big) \circ P\Big\}$.

- **a)** Montrer que tout élément de $\mathscr{C}$ est unitaire.
- **b)** On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{C}$ contient au plus un polynôme de degré n. On se donne pour cela deux polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathscr{C}$ de même degré. Montrer, en étudiant le polynôme $Q_1 \circ \big(X^2+p\big) - Q_2 \circ \big(X^2+p\big)$, que : $Q_1 = Q_2$.
- **c)** Montrer que si $\mathscr{C}$ contient un polynôme de degré 3, alors : $p \in \big\{-2, 0\big\}$.
- **d)** Montrer que si $p = 0$: $\mathscr{C} = \big\{X^n\big\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour tout $U = aX + b \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1, on pose : $\widehat{U} = \dfrac{X-b}{a}$. Il est alors clair que : $U \circ \widehat{U} = \widehat{U} \circ U = X$.

4) Montrer que pour toute suite commutante $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pour tout $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1, la suite $\Big(U \circ P_n \circ \widehat{U}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également commutante.

5)
- **a)** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec : $a \neq 0$. On pose : $U = aX + \dfrac{b}{2}$. Montrer le polynôme $U \circ \big(aX^2 + bX + c\big) \circ \widehat{U}$ est de la forme $X^2 + p$ pour un certain $p \in \mathbb{R}$.
- **b)** Trouver un polynôme $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 pour lequel : $U \circ \big(X^2 - 2\big) \circ \widehat{U} = 2X^2 - 1$.

Remarque : $2X^2 - 1$ n'est autre que le polynôme de Tchebychev T_2.

6) Montrer que les suites commutantes sont exactement les suites $\Big(U \circ X^n \circ \widehat{U}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les suites $\Big(U \circ T_n \circ \widehat{U}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, U décrivant l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 (*théorème de Block-Thielmann*).