LE THÉORÈME SPECTRAL ET QUELQUES APPLICATIONS

On s'intéresse dans ce devoir à des matrices **SYMÉTRIQUES** et **RÉELLES**.

1 LE THÉORÈME SPECTRAL

On souhaite établir le résultat suivant.

Théorème (Théorème spectral) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle. Il existe deux matrices $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathrm{O}(n)$ pour lesquelles : $M = PDP^{-1}$.
En résumé, M est diagonalisable à valeurs propres réelles dans une base orthonormale.

1) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possède une valeur propre complexe, i.e. que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ non nul pour lesquels : $MX = \lambda X$.

2) Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique ainsi que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ non nul pour lesquels : $MX = \lambda X$.

a) Montrer que λ est un réel. On pourra s'intéresser à la quantité ${}^t\overline{X}MX$ dans laquelle la barre désigne une conjugaison composante par composante.

b) Justifier l'existence d'un vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$ non nul pour lequel : $MY = \lambda Y$.

c) Montrer que $\mathrm{Vect}(Y)^\perp$ est stable par M.

3) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

a) Montrer qu'il existe un réel λ et deux matrices $M' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{O}(n)$ pour lesquelles : $M = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}P^{-1}$.

b) Montrer que M' est symétrique.

4) Prouver le théorème spectral.

2 APPLICATION À LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS MATRICIELLES

5) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que si : $M^k = I_n$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors : $M^2 = I_n$.

6) Résoudre l'équation : $M\,{}^tMM = I_n$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3 LE THÉORÈME D'HOFFMAN-SINGLETON

On souhaite établir le théorème suivant de 1960.

Théorème (Théorème d'Hoffman-Singleton) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à coefficients dans $\{0,1\}$ et de diagonale nulle.

S'il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel : $M^2 + M = \begin{pmatrix} d & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & d \end{pmatrix}$, alors : $d \in \{1,2,3,7,57\}$.

On note J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de taille n et U le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de taille n. Par hypothèse : $M^2 + M = J + (d-1)I_n$.

7) a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\left(M^2\right)_{ii}$ est le nombre de coefficients 1 dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de M.

b) En déduire que : $MU = dU$, puis que : $n = d^2 + 1$.

c) Montrer l'égalité : $\text{Ker}\,(M - dI_n) = \text{Ker}\,(J - nI_n) = \text{Vect}(U)$.

8) a) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A. Montrer que toute valeur propre réelle de A est racine de P.

b) En déduire les valeurs propres de J.

9) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M autre que d.

a) Montrer que pour un certain réel μ à préciser : $\text{Ker}\,(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}\,(J - \mu I_n)$.

b) Montrer que : $\mu = 0$.

c) En déduire que : $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$ avec : $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(n)$ et des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ pour lesquels : $M = P \begin{pmatrix} d & & \\ & \alpha I_p & \\ & & \beta I_q \end{pmatrix} P^{-1}$.
La valeur propre d est comptée une fois car d'après **7)c)** : $\dim\ \text{Ker}\,(M - dI_n) = 1$.

10) a) Justifier les égalités : $p + q + 1 = n$ et $d + p\alpha + q\beta = 0$.

b) En déduire que : $(p-q)\sqrt{4d-3} = d(d-2)$.

Clairement : $d = 2$ si : $p = q$. On suppose désormais : $p \neq q$.

c) Montrer que $4d-3$ est le carré d'un entier.

d) En déduire que : $d \in \{1, 3, 7, 57\}$.

On connaît des exemples de matrices satisfaisant le théorème d'Hoffman-Singleton pour : $d \in \{1, 2, 3, 7\}$, mais pas pour : $d = 57$. Exemples :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si : } d = 1, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si : } d = 2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si : } d = 3.$$

Pour : $d = 7$, les exemples sont de taille 50 et je m'épargnerai donc d'en expliciter un, et pour : $d = 57$, la question est ouverte, il s'agit de trouver une matrice de taille 3250…

Le théorème d'Hoffman-Singleton n'est pas vide de sens en dépit de son apparente gratuité, ce théorème est né dans le cadre de la *théorie des graphes*. Il faut hélas introduire un peu de vocabulaire pour le comprendre.

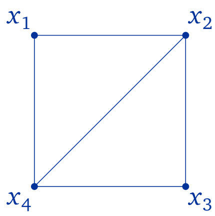
— Un *graphe* est un ensemble de *sommets* reliés les uns aux autres par des *arêtes*. On ne s'intéressera ici qu'à des arêtes non orientées entre sommets distincts.

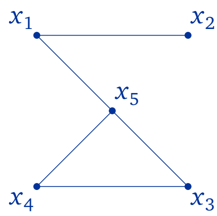
— Le nombre de voisins d'un sommet est appelé son *degré*. Un graphe dont les sommets sont tous de même degré d est dit *régulier de degré d*.

— On appelle *distance* entre deux sommets le nombre minimal d'arêtes qu'il faut parcourir pour les rejoindre — par convention $+\infty$ si aucun chemin n'est possible. Le *diamètre* d'un graphe est alors la plus grande distance possible qu'on peut trouver entre deux sommets quelconques.

— On appelle *matrice d'adjacence* d'un graphe de sommets $x_1, \ldots, x_n$ la matrice carrée de taille n dont le coefficient de position (i,j) vaut 1 si x_i et x_j sont liés par une arête et 0 sinon, et ce pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$. Il s'agit clairement d'une matrice symétrique à coefficients dans $\{0,1\}$ de diagonale nulle.

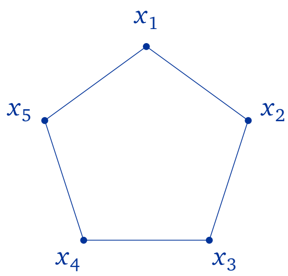
Exemple On a représenté ci-dessous deux graphes et leurs matrices d'adjacence.

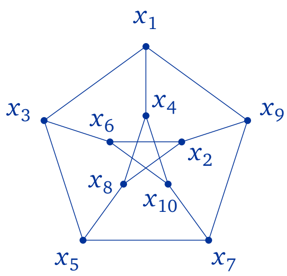




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut montrer qu'un graphe régulier de degré d de diamètre r possède au plus : $1 + d\sum_{k=0}^{r-1}(d-1)^k$ sommets. Les graphes pour lesquels cette valeur maximale est atteinte sont appelés *graphes de Moore*. Les graphes de Moore de degré d et de diamètre 2 possèdent ainsi d^2+1 sommets, et leur matrice d'adjacence satisfait par ailleurs la relation du théorème d'Hoffman-Singleton. D'après ce théorème, de tels graphes ne peuvent exister que pour : $d \in \{1,2,3,7,57\}$. On a représenté ci-dessous les trois graphes associés aux matrices proposées ci-dessus pour : $d=1$, $d=2$ et $d=3$.





Graphe de Petersen