Les droites sont des cercles

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Un bout de chemin avec Fibonacci

1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On suppose que le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines réelles distinctes r et r' et on note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite $\left(x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle élément de E ?

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda r^n + \lambda' r'^n$.

On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

2) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

3) Trouver quatre réels r, r', λ et λ' pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \lambda r^n + \lambda' r'^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

4) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{F_k^2}\right)$.

On souhaite pour finir établir le théorème suivant.

Théorème (Théorème de Zeckendorf) Tout entier naturel non nul n se décompose d'une et une seule façon, dite *représentation de Zeckendorf de* n, sous la forme : $n = F_{u_0} + \ldots + F_{u_r}$ où r est un entier naturel et où $u_0, \ldots, u_r$ sont des entiers naturels pour lesquels $u_0 \geqslant 2$ et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $u_{i+1} - u_i \geqslant 2$.

Par exemple : $1 = F_2$, $2 = F_3$, $3 = F_4$, $4 = F_2 + F_4 \ldots$ La condition : $u_{i+1} - u_i \geqslant 2$ signifie qu'on ne rencontre jamais deux nombres de Fibonacci consécutifs F_k et F_{k+1} dans la représentation de Zeckendorf d'un entier.

5) Calculer les représentations de Zeckendorf des entiers de 5 à 12.

6) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ étant strictement croissante de limite $+\infty$ avec $F_2 = 1$, on peut noter N le plus grand entier supérieur ou égal à 2 pour lequel $F_N \leqslant n$. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $F_i \leqslant n - F_N$, alors $N - i \geqslant 2$.

b) Montrer par récurrence que tout entier naturel non nul possède une représentation de Zeckendorf.

7) Cette dernière question est facultative.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{p} F_{2k} < F_{2p+1}$ et $\sum_{k=1}^{p} F_{2k+1} < F_{2p+2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n admet pour représentation de Zeckendorf la relation : $n = F_{u_0} + \ldots + F_{u_r}$ avec les notations du théorème. Montrer que : $F_{u_r} \leqslant n < F_{u_r+1}$.

c) Montrer l'unicité de la représentation de Zeckendorf.

2 Les droites sont des cercles

Des points de $\mathbb{C}$ sont dits *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle. On pose $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\right\}$.

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, on appelle *birapport de a, b, c et d* le nombre complexe : $\left[a, b, c, d\right] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$.

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts avec a, b et c alignés. Montrer que les points a, b, c et d sont alignés si et seulement si $\left[a, b, c, d\right] \in \mathbb{R}$.

2) Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$ avec $ab' - ba' \neq 0$. Vérifier que le couple $\left(\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right)$ est solution du système linéaire : $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Les formules obtenues sont appelées les *formules de Cramer*.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ trois points non alignés.

a) Écrire pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ la proposition : « ω est équidistant de a, b et c » sous la forme d'un système linéaire de deux équations d'inconnues ω et $\overline{\omega}$.

b) En déduire que a, b et c sont cocycliques. Attention de ne pas manquer la grosse subtilité de la question !

4) Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$ quatre points distincts. On note respectivement α, β et γ des racines carrées de a, b et c.

a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{U}$: $u^2 - v^2 = 2iuv\,\mathrm{Im}\big(u\overline{v}\big)$, puis que : $\big[a, b, c, z\big] = \dfrac{\mathrm{Im}\big(\overline{\alpha}\gamma\big)}{\mathrm{Im}\big(\overline{\beta}\gamma\big)} \times \dfrac{\big(\overline{\beta}z - \beta\big)\big(\alpha\overline{z} - \overline{\alpha}\big)}{|z-a|^2}$.

b) En déduire que $\big[a, b, c, z\big] \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.

5) **a)** Montrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$: $\big[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu\big] = \big[a, b, c, d\big]$.

b) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ quatre points distincts avec a, b et c non alignés. Montrer que a, b, c et d sont cocycliques si et seulement si $\big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}$.

À l'issue de ces questions, on peut affirmer que quatre points distincts $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}$.

Alors droites et cercles, même combat ? La fin de ce problème est facultative. Pour réconcilier droites et cercles, on ajoute un objet ∞ à $\mathbb{C}$, appelé son *point à l'infini*. Peu importe la nature de cet objet, on le choisit quelconque à l'extérieur de $\mathbb{C}$ et on note $\widehat{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \sqcup \big\{\infty\big\}$.

On appellera *super-cercle* [1] toute partie de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui est soit un cercle de $\mathbb{C}$, soit une droite de $\mathbb{C}$ à laquelle on ajoute le point à l'infini. Des points de $\widehat{\mathbb{C}}$ seront alors dits *super-cocycliques* [1] s'ils appartiennent à un même super-cercle. Intuitivement, toute droite est ici considérée comme un cercle qui se referme à l'infini.

Sans rentrer dans les détails techniques, il est connu que l'intersection de deux cercles distincts est soit vide, soit réduite à un point en cas de tangence, soit constituée de deux points. Il en va de même de l'intersection d'un cercle et d'une droite. Qu'en est-il de deux droites ? L'intersection de deux droites distinctes est soit vide, soit réduite à un point, mais si on leur ajoute le point à l'infini, elles se coupent en un point en cas de parallélisme et deux en cas de concourance. En résumé, deux super-cercles distincts se coupent toujours en 0, 1 ou 2 points. Deux droites parallèles auxquelles on ajoute ∞ doivent être vues comme deux super-cercles tangents en ∞.

On étend finalement à $\widehat{\mathbb{C}}$ la notion de birapport. On conserve pour cela la définition précédente, mais on convient que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$: $\dfrac{\infty - u}{\infty - v} = \dfrac{u - \infty}{v - \infty} = 1$. Par exemple, pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts : $\big[a, b, c, \infty\big] = \dfrac{c-a}{c-b}$.

6) Montrer que quatre points distincts $a, b, c, d \in \widehat{\mathbb{C}}$ sont super-cocycliques si et seulement si $\big[a, b, c, d\big] \in \mathbb{R}$.

7) **a)** Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ huit points distincts. Simplifier courageusement le produit suivant :

$$\big[a, b, c', d'\big]\big[a', b', c, d\big] \times \big[b, c, a', d'\big]\big[b', c', a, d\big] \times \big[c, a, b', d'\big]\big[c', a', b, d\big] \qquad (\textit{formule des six birapports}).$$

b) Vérifier que la formule des six birapports est encore vraie si $a = \infty$ et si $d = \infty$ — pas la peine de me le rédiger sur la copie. Pour quelle raison — sans nouveau calcul — est-elle vraie pour tous $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \widehat{\mathbb{C}}$?

On s'intéresse pour finir au résultat suivant.

Théorème **(Théorème des quatre super-cercles de Miquel)** Soient $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ quatre super-cercles. On suppose que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en deux points a_1 et b_1 et on définit de façon analogue les points a_2, a_3, a_4, b_2, b_3 et b_4. On suppose enfin que les huit points ainsi définis sont distincts.

Dans ces conditions, les points a_1, a_2, a_3 et a_4 sont super-cocycliques si et seulement si les points b_1, b_2, b_3 et b_4 le sont.

8) Illustrer ce théorème par deux ou trois figures en jouant sur la possibilité qu'il offre de choisir des droites ou des cercles, puis le démontrer en toute généralité.

Drôle de théorème que ce théorème de Miquel ! Un peu comme si on avait mille théorèmes en un seul. Ce qu'il faut en retenir, c'est que certains phénomènes mathématiques, pour être pleinement compris, nécessitent une grosse remise en question des concepts avec lesquels on les pense. Historiquement, Miquel a publié son théorème en 1838 dans le cas de quatre vrais cercles. On a compris plus tard que son résultat avait une forme générale, mais il a fallu pour l'atteindre quitter la géométrie classique du plan $\mathbb{C}$ et accepter une géométrie plus exotique $\widehat{\mathbb{C}}$, une version de $\mathbb{C}$ qu'on a en quelque sorte refermé autour de son point à l'infini. Une feuille de papier infinie qu'on replie autour d'un point, donc. Vous voyez à quoi ça ressemble ?

1. L'expression est de moi. Il s'agit seulement de bien distinguer les cercles et droites usuels des « super-cercles ».