Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

1 La formule de Wallis

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ (*intégrales de Wallis*) et : $\rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \dbinom{2n}{n}^2$.

1) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, a_n$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{\sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}} \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, puis la *formule de Wallis* :

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

2 Retours à l'origine

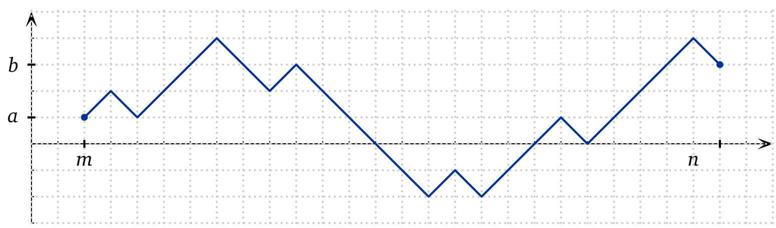
Initialement posée en 0, la chenille Becky se déplace sur $\mathbb{Z}$ par petits sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite à chaque instant. Pour modéliser sa trajectoire, on se donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ On pose alors : $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Remarque : L'existence d'une suite infinie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes impose en toute rigueur qu'on travaille avec des espaces probabilisés infinis, autrement dit qu'on dépasse le cadre simpliste du programme de MPSI, mais ce « détail » — de taille ! — n'aura aucun d'impact sur les raisonnements qui suivent. Les événements manipulés seront en effet tous construits à partir d'un nombre fini de variables aléatoires.

2) a) Montrer que $\dfrac{S_n + n}{2}$ suit une loi binomiale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la famille $(X_m, \ldots, X_n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec : $m \leqslant n$?

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, que peut-on dire de l'événement $\{S_n = k\}$ si n et k n'ont pas la même parité ? Déterminer un équivalent simple de $P(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

La chenille Becky se déplace sur $\mathbb{Z}$ par petits sauts vers la gauche ou vers la droite, mais on peut aussi représenter sa trajectoire dans le plan en prenant l'axe des abscisses pour axe des temps. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec : $m \leqslant n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on appellera *chemin de* (m,a) *à* (n,b) toute famille de points $(m, y_m), (m+1, y_{m+1}), \ldots, (n, y_n)$ pour laquelle : $y_m = a$, $y_n = b$ et pour tout $k \in [\![m, n-1]\!]$: $y_{k+1} = y_k \pm 1$.



3) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec : $m \leqslant n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $C_{(m,a)}^{(n,b)}$ le nombre total de chemins que Becky peut emprunter de (m,a) à (n,b). Montrer l'égalité : $C_{(m,a)}^{(n,b)} = \dbinom{n-m}{\frac{n-m+a-b}{2}}$.

4) **a)** Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, il existe autant de chemins de $(1,1)$ à $(2n,2k)$ qui touchent l'axe des abscisses que de chemins de $(1,-1)$ à $(2n,2k)$.

b) Combien existe-t-il pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$ de chemins de $(0,0)$ à $(2n,2k)$ ne touchant pas l'axe des abscisses après $(0,0)$? En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P\big(S_1 \neq 0 \text{ et } \ldots \text{ et } S_{2n-1} \neq 0 \text{ et } S_{2n} > 0\big) = \dfrac{1}{2} P(S_{2n} = 0)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P\big(S_1 \neq 0 \text{ et } \ldots \text{ et } S_{2n} \neq 0\big) = P(S_{2n} = 0)$. On pourra s'intéresser aux variables aléatoires $-X_1, \ldots, -X_{2n}$.

d) À combien évaluez-vous intuitivement la probabilité que Becky ne soit jamais revenue en 0 après 250 petits sauts ? Comparer cette réponse avec la valeur trouvée en **c)**. Pour l'application numérique, on pourra utiliser l'approximation asymptotique de la question **2)b)**.

5) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, les familles $\big(X_{2k+1}, X_{2k+1} + X_{2k+2}, \ldots, X_{2k+1} + \ldots + X_{2n}\big)$ et $(S_1, \ldots, S_{2n-2k})$ ont la même loi.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$P\big(S_{2k} = 0 \text{ et } S_{2k+1} \neq 0 \text{ et } \ldots \text{ et } S_{2n} \neq 0\big) = P(S_{2k} = 0)\, P(S_{2n-2k} = 0).$$

3 Loi de l'arcsinus pour le dernier retour à l'origine

Cette dernière partie est facultative et difficile. Cela dit, si vous voulez comprendre l'intérêt de la question **5)**, vous avez le droit de lire et de comprendre l'enchaînement des questions qui suivent et de méditer le résultat de la question **9)b)**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose à présent : $T_n = \max\Big\{k \in [\![1, n]\!] \;\Big|\; S_k = 0\Big\}$ et on fixe $a, b \in \,]0,1[$ avec : $a < b$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \in \,]a, b]\right) = \dfrac{1}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{na < k \leqslant nb} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

7) **a)** Montrer que pour tous $x > 0$ et $y \geqslant 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} \leqslant \dfrac{y}{2x\sqrt{x}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\right| \leqslant \dfrac{1}{4n\sqrt{n}}$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$: $\left|\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k} - \dfrac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{n}{4\sqrt{\pi}\big(k(n-k)\big)^{\frac{3}{2}}}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|P\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \in \,]a, b]\right) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{na < k \leqslant nb} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \dfrac{n}{4\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{na < k \leqslant nb} \dfrac{1}{\big(k(n-k)\big)^{\frac{3}{2}}}$.

8) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(]0,1[, \mathbb{R}\big)$.

a) Montrer que f est K-lipschitzienne sur $\left[\dfrac{a}{2}, b\right]$ pour un certain $K \geqslant 0$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand et $k \in [\![na, nb]\!]$: $\left|\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{K}{2n^2}$.

c) Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

d) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{na < k \leqslant nb} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.

9) **a)** Déduire des résultats précédents que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in \,]a, b]\right) = \frac{2}{\pi}\Big(\mathrm{Arcsin}\sqrt{b} - \mathrm{Arcsin}\sqrt{a}\Big)$ (*loi de l'arcsinus*).

b) Lorsque n est grand, à combien évaluez-vous intuitivement la probabilité que Becky ne revienne jamais en 0 entre les instants n et $2n$? Comparer cette réponse avec la limite trouvée en **a)**. On ADMETTRA que la loi de l'arcsinus est encore vraie pour $a = 0$ et $b = 1$.