Nombres de Bell, nombres de Catalan

1 Partitions de $[\![1,n]\!]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *partition de* $[\![1,n]\!]$ toute partie $\{X_1,\dots,X_p\}$ de $\mathscr{P}([\![1,n]\!])$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ pour laquelle : $[\![1,n]\!] = \bigcup_{k=1}^{p} X_k$, $\quad X_k \neq \varnothing$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ $\quad$ et $\quad X_i \cap X_j = \varnothing$ pour tous $i,j \in [\![1,p]\!]$ distincts. Les ensembles $X_1,\dots,X_p$ sont alors appelés les *classes* de la partition $\{X_1,\dots,X_p\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$, et par convention : $\quad B_0 = 1$. $\quad$ Les nombres B_n, n décrivant $\mathbb{N}$, sont appelés les *nombres de Bell*. On admettra par commodité que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est plus généralement le nombre de partitions d'un ensemble quelconque de cardinal n.

1) a) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, combien existe-t-il de partitions de $[\![1,n+1]\!]$ dont la classe de $n+1$ contient $k+1$ éléments ? En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad B_n \leqslant n!$, $\quad$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln B_n \leqslant n \ln n$.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1,n-1]\!]$. Pour toute fonction $f : [\![p+1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on pose :

$$X_k^f = \{k\} \cup f^{-1}(\{k\}), \qquad \text{ainsi que :} \quad \pi(f) = \{X_1^f,\dots,X_p^f\}.$$

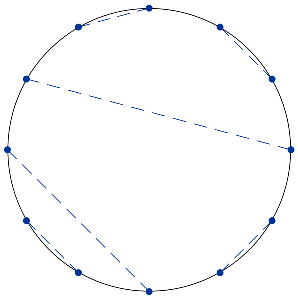
a) Montrer que pour toute fonction $f : [\![p+1,n]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$, $\pi(f)$ est une partition de $[\![1,n]\!]$.

b) Montrer que l'application $f \longmapsto \pi(f)$ est injective de $[\![1,p]\!]^{[\![p+1,n]\!]}$ dans l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$.

3) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n]\!]$: $\quad B_n \geqslant p^{n-p}$.

b) En choisissant : $\quad p = \left\lfloor \frac{n}{\ln n} \right\rfloor + 1 \quad$ dans le résultat de la question **a)**, montrer que : $\quad \ln B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n$.

2 Tchin-tchin sans croiser



À l'heure de l'apéro, douze amis sont assis autour d'une table ronde et tout le monde est servi. En principe, chacun devrait trinquer onze fois, mais pour abréger, il est décidé que chacun ne trinquerait qu'une fois — mais sans croiser les verres. De combien de manières est-ce possible ?

On va en fait résoudre ce problème pour un nombre pair quelconque de convives. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note ainsi C_n le nombre de configurations possibles de tchin-tchin sans croisement, et par convention : $\quad C_0 = 1$. $\quad$ Les nombre C_n, n décrivant $\mathbb{N}$, sont appelés les *nombres de Catalan*.

1) a) Expliquer pour tout $n \in \mathbb{N}$ pourquoi C_n est aussi le nombre de parenthésages cohérents possibles de n parenthèses ouvrantes et n parenthèses fermantes. Par exemple, le parenthésage : $\quad$ (( )) ( ) $\quad$ est cohérent alors que le parenthésage : $\quad$ ( )) ( ) ($\quad$ ne l'est pas.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

2) On note à présent f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de coefficients associée : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$: $\quad x f(x)^2 = f(x) - 1$.

c) En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire finalement une expression explicite de C_n en fonction pour tout $n \in \mathbb{N}$.