Nos amies les fonctions usuelles

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Encadrements du logarithme

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Simplifier φ_n' pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

2) a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note f la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ et g la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+1}$. Trouver des valeurs de a, b et c pour lesquelles g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfait les relations : $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$ et $g''(0) = f''(0)$.

b) Pour les valeurs de a, b et c trouvées en **a)**, montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\ln(1+x) \geqslant \frac{ax+b}{cx+1}$.

3) Montrer que l'inégalité de la question **2)b)** est meilleure que l'inégalité $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ de la question **1)b)**.

2 Racines d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ fixé. On pose une fois pour toutes $\theta = \frac{\pi}{n}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) z^k$.

1) a) Montrer que $P(1) = 2^n \cos^n \alpha$ pour un certain réel α à préciser.

b) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pose $Q(z) = \left(z\,e^{i\theta} + 1\right)^n - \left(z\,e^{-i\theta} + 1\right)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a) Exprimer $Q(z)$ en fonction de $P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) En déduire que pour toute racine complexe z de P : $\left|z + e^{i\theta}\right| = \left|z + e^{-i\theta}\right|$.

c) En déduire que les racines de P sont toutes réelles.

3) a) Déterminer pour tout $x \in [-1, 0]$ une forme trigonométrique de $x\,e^{i\theta} + 1$ dont l'argument est une arctangente.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1, 0]$: $P(x) = \left(x^2 + 2x\cos\theta + 1\right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} \frac{x \sin\theta}{1 + x\cos\theta}\right)$.

c) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x \sin\theta}{1 + x\cos\theta}$ est bijective de $[-1, 0]$ sur $\left[-\frac{1}{t}, 0\right]$ où $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

On rappelle que pour tout $x > 0$: $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

d) En déduire que la fonction $x \longmapsto n \operatorname{Arctan} \frac{x\sin\theta}{1 + x\cos\theta}$ est bijective de $[-1, 0]$ sur $\left[-\frac{(n-1)\pi}{2}, 0\right]$.

e) En déduire le nombre de racines de P dans $[-1, 0]$. On pourra distinguer le cas où n est pair du cas où il est impair.

3 Un résultat d'irrationalité

Cet exercice est facultatif. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux pour lesquels $|m| \leqslant \sqrt{n}$.

On pose $\varphi = \operatorname{Arccos} \dfrac{m}{\sqrt{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad u_k = \sqrt{n}^k \cos(k\varphi)$.

1) **a)** Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k et u_{k-1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que u_k est un entier pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) On suppose dans cette question que n n'est pas une puissance de 2. L'entier n possède donc un diviseur premier p autre que 2.

a) Montrer qu'aucun des termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est divisible par p.

b) En déduire que $\dfrac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde et s'intéresser à u_k pour une valeur bien choisie de k.

3) On suppose dans cette question que n est une puissance de 2 supérieure ou égale à 8 : $\quad n = 2^r \quad$ pour un certain entier $r \geqslant 3$. A fortiori, m est impair.

a) Montrer que $\dfrac{u_k}{2^{k-1}}$ est un entier impair pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $\dfrac{\varphi}{\pi}$ est irrationnel.

4) Achever de déterminer les couples (m, n) pour lesquels $\dfrac{\varphi}{\pi}$ est rationnel.