$\dfrac{\pi^2}{6}$ ET LE DILOGARITHME

1 En route pour $\dfrac{\pi^2}{6}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ *(intégrales de Wallis)* et $\displaystyle b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$.

1) a) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, a_n$.

2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\displaystyle t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle 0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\,(a_{2n} - a_{2n+2})$.

c) En déduire que $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle \frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)\, b_n - (2n+2)\, b_{n+1}$, puis que $\displaystyle 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

c) En déduire enfin l'existence et la valeur de $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2 Le dilogarithme

On pose à présent $\ell(0) = 1$ et pour tout $t \in \,]0,1[$: $\displaystyle \ell(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$.

4) Montrer que ℓ est continue sur $[0,1[$.

On appelle alors *fonction dilogarithme* la fonction Li_2 définie pour tout $x \in [0,1[$ par : $\displaystyle \mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \ell(t) \, \mathrm{d}t$.

5) a) Montrer que Li_2 est dérivable sur $[0,1[$ et étudier sa monotonie.

Cette monotonie prouve que Li_2 possède une limite en 1, éventuellement infinie. Le théorème sous-jacent s'appelle le *théorème de la limite monotone* et on l'ADMET pour le moment.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1[$: $\displaystyle -\ln(1-t) \leqslant \frac{t}{1-t}$, puis que $\ell(t) \leqslant 1 - \ln(1-t)$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\mathrm{Li}_2(x) \leqslant 2x + (1-x)\ln(1-x)$, puis que la limite de Li_2 en 1 est finie.

Les questions **6)** et **7)** sont facultatives.

6) a) Calculer $\displaystyle \int_0^t u^k \, \mathrm{d}u$ pour tous $t \in [0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u} \, \mathrm{d}u.$$

b) En déduire que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant -\ln(1-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

c) En déduire que pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leqslant \mathrm{Li}_2(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

d) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = \mathrm{Li}_2(x)$, mais aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x)$.

e) Montrer que Li_2 est majorée par $\dfrac{\pi^2}{6}$ sur $[0,1[$, puis en déduire $\displaystyle \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x)$.

7) a) Calculer $\displaystyle \lim_{x \to 1} \ln x \ln(1-x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$: $\displaystyle \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2}$.