

$\frac{\pi^2}{6}$, WALLIS ET STIRLING

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ (intégrales de Wallis).

- 1) a) Calculer a_0 et a_1 , puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$.

Ce devoir se propose de vous mener à trois limites à la fois belles et importantes :

■ **Théorème** ($\frac{\pi^2}{6}$, formule de Wallis et formule de Stirling) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (formule de Wallis) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} = 1$ (formule de Stirling).

■ 1 EN ROUTE POUR $\frac{\pi^2}{6}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt$.

- 2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq b_n \leq \frac{\pi^2}{4} (a_{2n} - a_{2n+2})$.
- c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, dt$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}$.
- c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
- d) En déduire enfin l'existence et la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

■ 2 LA FORMULE DE WALLIS

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$. Attention, c'est la lettre grecque « rho », pas la lettre « p » !

- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\rho_n = \frac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \binom{2n}{n}$.
- 5) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- b) En déduire un encadrement de ρ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n$.
- c) En déduire la formule de Wallis.

■ 3 LA FORMULE DE STIRLING

On note f la fonction $x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et g la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{1}{12x} + \frac{1}{12(x+1)}$ sur \mathbb{R}_+^* .

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}$ et $v_n = \ln u_n$.

6) Simplifier f'' et g'' sur \mathbb{R}_+^* , puis montrer que f est minorée par 1 et g majorée par 1 sur \mathbb{R}_+^* .

7) a) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ à l'aide de la fonction f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif ℓ .

c) Montrer, en étudiant le rapport $\frac{u_n^2}{u_{2n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. En déduire la formule de Stirling.