$\dfrac{\pi^2}{6}$, Wallis et Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t \quad$ (*intégrales de Wallis*).

1) a) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n > 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, a_n$.

Ce devoir se propose de vous mener à trois limites à la fois belles et importantes :

Théorème ($\dfrac{\pi^2}{6}$**, formule de Wallis et formule de Stirling)** $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (*formule de Wallis*) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi} = 1$ (*formule de Stirling*).

1 En route pour $\dfrac{\pi^2}{6}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$.

2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin t$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} \big(a_{2n} - a_{2n+2}\big)$.

c) En déduire enfin la limite : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{2n+2} = (2n+2) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$,

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1) b_n - (2n+2) b_{n+1}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

d) En déduire enfin l'existence et la valeur de : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\quad$ qu'on note aussi : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2 La formule de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad \rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \dbinom{2n}{n}^2$.

5) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire un encadrement de ρ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 1$.

c) En déduire la formule de Wallis.

3 La formule de Stirling

On note f la fonction $x \longmapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et g la fonction $x \longmapsto f(x) - \frac{1}{12x} + \frac{1}{12(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n}$ et $v_n = \ln u_n$.

6) a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f''(x) = \frac{1}{2x^2(1+x)^2}$, et simplifier de même g' sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que f est minorée par 1 et g majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

7) a) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ à l'aide de la fonction f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif ℓ.

c) Montrer, en étudiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\frac{u_n^2}{u_{2n}}$, que : $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. En déduire la formule de Stirling.