π PAR-CI, π PAR-LÀ

Ce devoir a trois objectifs :

- tester votre compréhension du symbole $\sum$ et vous entraîner à le manipuler,
- vous confronter à un problème long dont les questions s'enchaînent et renvoient les unes aux autres,
- vous faire démontrer trois jolies formules.

1 π PAR-CI

On pose : $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis pour tout $x \in D$: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, la fonction cosinus ne s'annulant pas sur D.

1) a) Montrer que la fonction tangente ainsi définie est dérivable sur D et exprimer $\tan'(x)$ en fonction de $\tan x$ pour tout $x \in D$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $0 \leqslant \tan x \leqslant 1$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, \mathrm{d}x$.

2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 x\right) \tan^{2k} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2k+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$.

3) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4n+2}$.

c) En déduire finalement la limite : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, qu'on note aussi : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$

2 INTERLUDE

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle converge. On note α sa limite.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{2n+1} = \frac{a_n}{4} + b_n$.

d) En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de α.

5) Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec : $m \leqslant n$ et $p_m, \ldots, p_n$ des réels pour lesquels : $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant p_m$.

a) Montrer que si m est pair et n est impair : $0 \leqslant \sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k \leqslant p_m$, puis que la même inégalité est vraie si m et n sont pairs.

b) Montrer en toute généralité que : $\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k\right| \leqslant p_m$. On essaiera d'exploiter la question **a)** plutôt que de traiter deux nouveaux cas.

6) a) Montrer SANS calculer l'intégrale que pour tout entier $i \geqslant 2$: $\frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \ln n + 1$.

3 π PAR-LÀ

Cette partie est plus difficile, mais mérite quand même d'être soigneusement cherchée. Consacrez-y du temps et faites ce que vous pouvez !

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $d_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

7) a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ en exploitant les résultats précédents.

b) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de α.

8) a) Factoriser la différence : $\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n^2 = d_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right)$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n^2 - d_n = \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}$.

9) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$: $s_{n,i} = \sum_{\substack{-n\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$: $s_{n,-i} = -s_{n,i}$. Que vaut $s_{n,0}$?

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n^2 - d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i-1}$.

c) Montrer, en commençant par poser : $k = j - i$, que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$: $s_{n,i} = \sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

d) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$: $|s_{n,i}| \leqslant \frac{1}{n-i+1}$.

e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|c_n^2 - d_n\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i+1)}$.

f) Factoriser la somme : $\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

g) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|c_n^2 - d_n\right| \leqslant \frac{4}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

10) Déduire des résultats précédents les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, qu'on note aussi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$