POLYNÔMES DE DEGRÉ 3 ET SOMMES DE SINUS

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 RACINES RÉELLES D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 3

1) Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On note P la fonction polynomiale $x \longmapsto x^3 + px + q$.

a) Combien P possède-t-elle de racines réelles si $p \geqslant 0$?

b) On suppose $p < 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes, dans lesquelles α est un réel à préciser :

(i) P possède trois racines réelles. (ii) $P(-\alpha)P(\alpha) < 0$. (iii) $4p^3 + 27q^2 < 0$.

c) Démontrer finalement que P possède trois racines réelles si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Le réel $4p^3 + 27q^2$ est appelé le *discriminant de* P. On peut en fait définie une notion générale de discriminant pour tout polynôme de quelque degré qu'il soit. La nullité du discriminant caractérise alors la présence d'une racine **MULTIPLE**, i.e. la possibilité de factoriser par $(X - \lambda)^2$ pour une certaine racine λ. Pour une racine **SIMPLE** λ, on peut factoriser par $X - \lambda$ mais pas par $(X - \lambda)^2$.

2) a) Par quelle translation simple peut-on transformer un polynôme de la forme $X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ en un polynôme de la forme $X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$?

b) En déduire sans aucune nouvelle étude de fonction le nombre de racines du polynôme $X^3 + 3X^2 - 2X - 3$.

2 SOMMES DE SINUS

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \quad$ et $\quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

1) a) Transformer $2\sin\frac{x}{2}\, F_n'(x)$ en la différence de deux sinus pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que F_n' possède un nombre fini de zéros dans $[0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout zéro z de F_n' dans $[0, \pi]$: $\quad F_n(z) \geqslant F_{n-1}(z)$.

Théorème majeur de MPSI, le *théorème des bornes atteintes* affirme que toute fonction continue sur un segment y possède un maximum et un minimum, mais nous l'étudierons plus tard. Pour le moment, nous allons faire avec les moyens du bord.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[a, b]$, i.e. que f est dérivable sur $[a, b]$ et que f' y est continue. On suppose par ailleurs que f' possède un nombre fini de zéros $x_1, \ldots, x_r$ dans $[a, b]$ avec $x_1 < \ldots < x_r$. On pose enfin $x_0 = a$ et $x_{r+1} = b$ — avec éventuellement $x_0 = x_1$ ou $x_r = x_{r+1}$.

a) Montrer que f possède un minimum sur $[a, b]$.

b) Soit c un point en lequel f atteint son minimum. On suppose c distinct de a et b. Montrer soigneusement que $f'(c) = 0$. À quel endroit dans la preuve a-t-il été important que c soit distinct de a et b ?

3) Déduire des questions précédentes que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]0, \pi[$: $\quad F_n(x) > 0 \quad$ (*inégalité de Fejér-Jackson*).

4) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad S_n(x) \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}$. Admettez le résultat dans un premier temps et attendez que nous ayons appris à mener ce genre de calculs grâce à des nombres complexes.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]0, \pi]$: $\quad \left|S_n(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{x}$.

6) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant m+1$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{S_n(x)}{n+1} - \frac{S_m(x)}{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n} S_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \pi\right]$: $\displaystyle\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \frac{2\pi}{(m+1)\,x}$.

7) Soit $x \in \left]0, \pi\right]$. On note m le plus grand entier naturel non nul inférieur ou égal à $\dfrac{\pi}{x}$ — appelé la *partie entière de* $\dfrac{\pi}{x}$.

a) Montrer que pour tout $n \in [\![1, m]\!]$: $\big|F_n(x)\big| \leqslant \pi$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant m+1$: $\displaystyle\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant 2$, puis que $\big|F_n(x)\big| \leqslant \pi + 2$.

8) Montrer finalement que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\big|F_n(x)\big| \leqslant \pi + 2$.

Deux propriétés des fonctions F_n ont été démontrées dans ce problème, d'abord qu'elles sont toutes strictement positives sur $\left]0, \pi\right[$, ensuite qu'elles sont toutes bornées en valeur absolue par $2 + \pi$ sur $\mathbb{R}$. Il est remarquable que ces propriétés ne dépendent pas de n, mais que se passe-t-il quand on fait tendre n vers $+\infty$? La fascinante théorie des *séries de Fourier* montre que pour tout $x \in \left]0, 2\pi\right[$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \pi - x$ et ce résultat se prolonge naturellement par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier. On a représenté cette fonction limite en pointillés sur les figures ci-dessous.