Polynômes de degré 3, convexité

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Racines réelles d'un polynôme de degré 3

1) Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On note P la fonction polynomiale $x \longmapsto x^3 + px + q$.

a) Montrer que si : $p \geqslant 0$, P possède une et une seule racine réelle.

b) On suppose : $p < 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes, dans lesquelles α est un réel à préciser :

(i) P possède trois racines réelles.

(ii) $P(-\alpha)\,P(\alpha) < 0$.

(iii) $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Comme : $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$ dans le cas où : $p \geqslant 0$, on a finalement prouvé le théorème suivant :

Théorème Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^3 + pX + q$ possède trois racines réelles si et seulement si : $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Le réel $4p^3 + 27q^2$ est appelé le *discriminant* de P. On peut en effet définir dans un cadre général une notion de discriminant pour tout polynôme de quelque degré qu'il soit. La nullité du discriminant caractérise alors la présence d'une racine **MULTIPLE**, i.e. la possibilité de factoriser par $(X - \lambda)^2$ pour une certaine racine λ. Pour une racine **SIMPLE** λ, on peut factoriser par $X - \lambda$ mais pas par $(X - \lambda)^2$.

2) Combien la fonction $x \longmapsto x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ possède-t-elle de racines réelles ? On répondra à la question **SANS** étudier cette fonction, en tâchant seulement de se ramener au résultat de la question **1)** par une manipulation adaptée.

2 Une introduction à la convexité

Le concept de *fonction convexe* a été brièvement présenté en exercice. Ce problème en approfondit l'étude.

Définition (Fonction convexe deux fois dérivable) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On dit que f est *convexe sur* I si f'' y est positive ou nulle.

Comme on l'a vu, le graphe de f est dans ce cas situé au-dessus de toutes ses tangentes. Formellement, cela signifie que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$.

1) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose f'' positive sur I.

a) Montrer que pour tous $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$: $f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
On pourra remarquer que le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en $a = (1-\lambda)x + \lambda y$.

b) Justifier l'interprétation suivante du résultat de la question **a)** : « Le graphe de f entre deux points est situé sous la corde qui les relie. »

L'inégalité de la question **1)a)** est en réalité la **DÉFINITION** classique de la convexité qu'on trouve partout. La définition que j'en ai donnée ci-dessus n'en est qu'une **CARACTÉRISATION** pour les fonctions deux fois dérivables. L'inégalité de la question **a)** offre plus de souplesse car elle ne requiert pas la moindre hypothèse de dérivabilité.

La convexité a son envers, qu'on appelle *concavité*. L'idée est simple, une fonction deux fois dérivable f est *concave* si $-f$ est convexe. Une fonction deux fois dérivable est ainsi concave si sa dérivée est **NÉGATIVE** ou nulle, son graphe est situé **SOUS** toutes ses tangentes et l'inégalité de la question **1)a)** est encore vraie mais dans l'autre sens. Par exemple, la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour tout $x > 0$: $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$.

Dans les questions qui suivent, quand on vous demande de démontrer une inégalité « par un argument de convexité », vous devez la démontrer en exploitant la position du graphe d'une certaine fonction convexe ou concave par rapport l'une de ses tangentes ou par rapport à l'une de ses cordes.

2) Soient $p, q > 1$ deux réels pour lesquels : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer par un argument de convexité que pour tous $x, y > 0$: $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$ (*inégalité de Young*).

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2 et $x > -1$.

a) Montrer l'*inégalité de Bernoulli* : $\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{n}$ par un argument de convexité.

On généralise à présent cette inégalité. Il s'agit de montrer que :

$$1 + \frac{1}{n}\,x \geqslant \sqrt{1 + \frac{2}{n}\,x} \geqslant \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n}\,x} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{1 + \frac{n}{n}\,x} = \sqrt[n]{1+x}.$$

b) Trouver pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ un réel $\lambda_k \in [0,1]$ pour lequel : $1 + \dfrac{k}{n}\,x = (1 - \lambda_k) + \lambda_k \left(1 + \dfrac{k+1}{n}\,x\right)$.

c) En déduire pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, par un argument de convexité, l'inégalité : $\sqrt[k]{1 + \dfrac{k}{n}\,x} \geqslant \sqrt[k+1]{1 + \dfrac{k+1}{n}\,x}$.

4) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable concave. On pose pour tout $x, y > 0$: $\varphi(x,y) = y\,f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

a) Montrer que pour tous $x, x', y, y' > 0$: $\varphi(x,y) + \varphi(x',y') \leqslant \varphi(x+x', y+y')$.

b) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \varphi(x_k, y_k) \leqslant \varphi\left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k\right)$.

5) Soient $p, q > 1$ deux réels pour lesquels : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^{\frac{1}{p}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et avec les notations de la question **4)**, simplifier $\varphi(x,y)$ pour tous $x, y > 0$.

b) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (*inégalité de Hölder*).

6) Soit $p > 1$.

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et avec les notations de la question **4)**, simplifier $\varphi(x,y)$ pour tous $x, y > 0$. Si vous vous débrouillez bien, vous n'avez aucun produit compliqué à dériver dans cette question !

b) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (*inégalité de Minkowski*).

Pour $p = 2$, l'inégalité de Hölder généralise l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* selon laquelle : $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$.

L'inégalité de Minkowsi généralise quant à elle l'*inégalité triangulaire*. Pour $p = 2$ et $n = 2$, munissons en effet le plan d'un repère orthonormal quelconque et donnons-nous deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2). Aussitôt : $\left\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \left\|\overrightarrow{x}\right\| + \left\|\overrightarrow{y}\right\|$.

On peut aussi déduire du résultat de la question **4)b)** l'*inégalité de Milne* de notre précédent devoir à la maison, mais — question bonus — grâce à quelle fonction f ?