Polynômes et nombres de Bernoulli

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un et un seul $Q \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel : $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Le résultat de la question **1)** justifie l'existence et l'unicité de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par : $B_0(X) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n'(X) = n\,B_{n-1}(X)$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme B_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Bernoulli* et le réel $B_n(0)$, noté β_n, est appelé le $n^{\text{ème}}$ *nombre de Bernoulli*.

2) **a)** Calculer B_1, B_2, β_1 et β_2.

b) Déterminer le degré de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $B_n(1) = \beta_n$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$. Que vaut β_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

4) **a)** Montrer, grâce à la formule de Taylor, que pour tous $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k}\, X^k$.

b) En déduire une relation permettant de calculer β_{n+1} en fonction de $\beta_0, \ldots, \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer B_3, B_4, β_3 et β_4.

5) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

b) En déduire que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{B_{p+1}(n+1) - \beta_{p+1}}{p+1}$.

c) En déduire une expression factorisée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 3 - \frac{1}{n!}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\beta_n| \leqslant n!$.

c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$: $\big|B_n(x)\big| \leqslant 3 \times n!$.

7) Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé avec : $|z| < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle R_n = \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 \mathrm{e}^{-zx} B_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle R_{n+1} = R_n + \big(1 - \mathrm{e}^{-z}\big)\,\frac{\beta_{n+1}}{(n+1)!}\, z^{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\big(1 - \mathrm{e}^{-z}\big)\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{k!}\, z^k = z\mathrm{e}^{-z} + R_n$.

c) Montrer, en majorant $|R_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k!}\, z^k = \begin{cases} \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} & \text{si : } z \neq 0 \\ 1 & \text{si : } z = 0. \end{cases}$

8) Cette dernière question est facultative. On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction : $\mathrm{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$.

a) Sur quel ensemble la fonction cotangente est-elle définie ? Sur quel ensemble coïncide-t-elle avec la fonction $\dfrac{1}{\tan}$?

b) Montrer que pour tout $x \in \,]-1,1[\setminus\{0\}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k} = \frac{x}{2}\,\mathrm{cotan}\Big(\frac{x}{2}\Big)$.

c) Simplifier : $\mathrm{cotan}(x) - 2\,\mathrm{cotan}(2x)$ pour tout x pour lequel cette expression est définie.

d) En déduire que pour tout $x \in \,]-1,1[$: $\displaystyle\tan x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\, \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\, 2^{2k}\big(2^{2k} - 1\big)\, x^{2k-1}$. Ce résultat est appelé le *développement en série entière de la fonction tangente au voisinage de 0*.