Polynômes orthogonaux

1 Définition des polynômes orthogonaux

On se donne une fois pour toutes deux réels a et b avec $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ strictement positive, et on pose, pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$: $\quad \big\langle P,Q\big\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'application $\big\langle\cdot,\cdot\big\rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, de norme 1, de coefficient dominant positif et orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ — par convention : $\quad \mathbb{R}_{-1}[X] = \big\{0\big\}$.

2 Exemple des polynômes de Legendre

Dans cette partie : $\quad a = -1, \quad b = 1 \quad$ et φ est la fonction $t \longmapsto 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad K_n = \big(X^2-1\big)^n \quad$ et $\quad L_n = K_n^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\Big(\big(X^2-1\big)^n\Big)$.

3) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad L_n(1) = 2^n n! \quad$ et déterminer de même une expression de $L_n(-1)$.

5) **a)** Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

b) Montrer que L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer un réel a pour lequel $L'_{n+1} - aL_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis calculer $\big\langle L'_{n+1}, L_n\big\rangle$ en fonction de $\|L_n\|$.

b) Montrer l'égalité : $\quad L'_{n+1} = 2(n+1)XL'_n + 2(n+1)^2L_n$.

c) Calculer $\big\langle XL'_n, L_n\big\rangle$ en fonction de $\|L_n\|$.

d) En déduire l'égalité : $\quad \|L_n\| = 2^n n!\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

7) Exprimer le polynôme P_n de la question **2)** en fonction de L_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Racines des polynômes orthogonaux

On se donne une fois pour toutes un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$.

8) On note $x_1,\ldots,x_r$ les racines distinctes de P_n qui sont à la fois éléments de $]a,b[$ et de multiplicité impaire, et on pose : $\quad P = \displaystyle\prod_{k=1}^r (X-x_k)$.

a) Que peut-on dire du signe de P_nP sur $]a,b[$?

b) En déduire que P est de degré n, puis que P_n est scindé à racines simples toutes éléments de $]a,b[$.

9) Soient $x_1,\ldots,x_n \in\,]a,b[$ distincts et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. On note $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1,\ldots,x_n$ et on suppose que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$: $\quad \displaystyle\int_a^b P(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\lambda_k = \langle \Lambda_k, 1 \rangle$, puis indépendamment que : $\lambda_k > 0$.

b) Montrer que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont exactement les n racines distinctes de P_n.

On note finalement $x_1, \dots, x_n$ les racines distinctes de P_n et p_n son coefficient dominant, et $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$. On pose en outre, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\lambda_k = \langle \Lambda_k, 1 \rangle$.

10) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$: $\displaystyle\int_a^b P(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$.

11) Soit $f \in \mathscr{C}^{2n}([a,b], \mathbb{R})$. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines distinctes de P_n et p_n son coefficient dominant.

a) Montrer que l'application $P \longmapsto \big(P(x_1), P'(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On note H l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ pour lequel pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $H(x_k) = f(x_k)$ et $H'(x_k) = f'(x_k)$.

b) Soit $x \in [a,b]$ distinct des réels $x_1, \dots, x_n$. On note F la fonction $t \longmapsto f(t) - H(t) - AP_n(t)^2$ sur $[a,b]$ où A est un réel que l'on aura à choisir convenablement en fonction des besoins de la question. Montrer que pour un certain $c \in [a,b]$: $f(x) - H(x) = \dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!p_n^2} P_n(x)^2$.

c) En déduire l'inégalité : $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right| \leqslant \frac{\sup_{[a,b]} \left| f^{(2n)} \right|}{(2n)!p_n^2}$.

Cette inégalité permet des calculs numériques approchés satisfaisants d'intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

C'est là l'une des utilisations naturelles des polynômes orthogonaux.