PROBABILITÉS

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

1 VIDER L'URNE !

Soit $n \geqslant 2$ fixé. Une urne contient une boule rouge et $n-1$ boules blanches. On vide l'urne en y effectuant des tirages successifs de la manière suivante :

— les tirages de numéro impair sont effectués **SANS** remise,

— les tirages de numéro pair sont effectués **AVEC** remise.

1) Quel nombre N de tirages faut-il effectuer pour vider l'urne ?

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note R_k l'événement « On tire la boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) » et S_k l'événement « On tire la boule rouge pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

2) Montrer que la probabilité $k \longmapsto P(R_k)$ est constante sur $[\![1, N]\!]$. On pourra distinguer les calculs de $P(R_{2k})$ et $P(R_{2k+1})$ pour tout entier k pour lequel cela a un sens.

3) Montrer pour tout entier k pour lequel cela a un sens : $P(S_{2k+1}) = \dfrac{n-k-1}{n(n-1)}$.

4) En déduire que la probabilité pour que la boule rouge ait été tirée exactement une fois au cours des N tirages vaut $\dfrac{1}{2}$.

2 LE MÊME TIRAGE POUR LA PREMIÈRE FOIS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $n+1$ tirages successifs avec remise dans une urne de n boules numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on note $E_{n,k}$ l'événement « On a re-tiré au $k^{\text{ème}}$ tirage, pour la première fois, une boule qu'on avait déjà tirée avant ». Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on note en outre $D_{n,k}$ l'événement « Les boules qu'on a tirées au cours des k premiers tirages sont deux à deux distinctes ».

1) Quel espace probabilisé (Ω, P) peut-on proposer pour modéliser cette expérience aléatoire ? On travaillera désormais dans le seul cadre de ce modèle. En d'autres termes, cet exercice doit être traité par des techniques de dénombrement adaptées à l'espace probabilisé (Ω, P) proposé.

2) **a)** Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$: $P(E_{n,k}) = \dfrac{n!(k-1)}{(n-k+1)!n^k}$.

b) Étudier : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_{n,k})$ pour tout $k \geqslant 2$.

3) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\pi_{n,k} = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

a) Exprimer $P(D_{n,k})$ en fonction de $\pi_{n,k}$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$: $\ln(1-x) \geqslant -x - x^2$.

c) Soit $t > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $k_n = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$. Montrer que : $\pi_{n,k_n} \underset{n \to +\infty}{=} \ell + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour un certain réel ℓ à préciser.

4) Soient $a, b > 0$ avec : $a < b$. On note U_n l'événement « On a re-tiré pour la première fois, au cours d'un tirage dont le numéro appartient à l'intervalle $\left]a\sqrt{n}, b\sqrt{n}\right]$, une boule qu'on avait déjà tirée ».

a) Exprimer U_n en fonction de certains des événements $D_{n,1}, \ldots, D_{n,n+1}$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n)$.

Pour : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 2$ par exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n) \approx 0,75$. En d'autres termes, pour n assez grand, dans 3 quarts des cas, on re-tire pour la première fois une boule qu'on avait déjà tirée au cours d'un tirage dont le numéro est compris entre $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ et $2\sqrt{n}$.

3 Une stratégie de prédiction du dernier succès

On répète n fois indépendamment une expérience de probabilité de succès $p \in]0,1[$. On se propose de deviner en cours de route la position du dernier succès obtenu à l'issue de ces n expériences. Il s'agit, après chaque succès, de prendre tout de suite une décision — soit on estime qu'on vient de voir passer le dernier succès, soit on estime qu'on aura d'autres succès par la suite. On ne peut bien sûr se prononcer en faveur du dernier succès qu'au plus une fois pour la série complète des n expériences.

On s'intéresse plus précisément dans ce cadre à une certaine famille de stratégies de prise de décision. Pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, la stratégie $\mathscr{S}_r$ consiste à laisser passer les $n-r$ premières expériences sans se prononcer quoi qu'il arrive, puis à proposer comme dernier succès le prochain succès obtenu, si toutefois on en obtient un.

Pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, on note G_r l'événement « On devine correctement le dernier succès à l'aide de la stratégie $\mathscr{S}_r$ ».

1) a) Montrer que : $P(G_r) = rp(1-p)^{r-1}$. Une réponse formelle avec des événements proprements introduits est ici attendue.

b) Montrer que pour tout $r \in [\![1,n-1]\!]$: $P(G_r) \leqslant P(G_{r+1}) \iff r \leqslant \dfrac{1}{p} - 1$.

c) En déduire le maximum $\pi_n(p)$ de la fonction $r \longmapsto P(G_r)$ sur $[\![1,n]\!]$.

d) On lance 30 fois un dé équilibré et on veut prédire la position du dernier 6 obtenu à l'aide de l'une des stratégies étudiées. Quelle valeur de r convient-il de choisir ? Et si on lance le dé 300 fois ?

2) a) Étudier : $\displaystyle\lim_{p\to 0} \pi_n(p)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que la fonction π_n est continue sur $]0,1[$.

c) Montrer que la fonction π_n est strictement croissante sur $]0,1[$.