Probabilités

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes. Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : exercice **1** et exercice **2** questions **1)** à **4)**.

— Piste rouge : exercices **1** et **2**.

— Piste noire : exercices **2** et **3**.

1 Un modèle d'urne

Une urne contient initialement deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On réalise un nombre illimité de fois l'épreuve suivante — on tire une boule de l'urne et si elle est noire, on la remet dans l'urne, mais si elle est blanche, on la garde de côté et on met une nouvelle boule noire dans l'urne à la place.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.

1) **a)** Déterminer la loi de X_1.

b) Quelles valeurs X_n peut-elle prendre pour $n \geqslant 2$? Calculer $P(X_n = 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer $P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1} = j)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $i, j \in [\![0, 2]\!]$. On résumera le résultat sous la forme d'un tableau à deux entrées.

2) On pose $p_n = P(X_n = 1)$ et $u_n = 3^n p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer deux réels a et b pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad p_{n+1} = a p_n + \dfrac{b}{3^n}$.

b) Calculer une expression explicite de u_n puis de p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire $P(X_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$.

2 La loi de succession de Laplace

On s'intéresse à un phénomène à deux issues succès/échec qu'on observe se répéter indépendamment $n+1$ fois.

Énoncé du problème : Si s succès et $n-s$ échecs ont été observés au cours des n premières occurrences du phénomène, avec quelle probabilité obtiendra-t-on un succès la $(n+1)^{\text{ème}}$ fois ? Par exemple, si les n Martiens que j'ai pu observer jusqu'ici ont tous été gris, avec quelle probabilité le prochain le sera-t-il aussi ?

0) À combien estimez-vous naïvement cette probabilité en fonction de n et s ?

On se donne dans un premier temps un réel $p \in [0, 1]$ ainsi que n variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P), indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$. Le phénomène étudié admet p pour probabilité de succès et pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, X_i vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ occurrence du phénomène est un succès et 0 si c'est un échec.

1) Que vaut $P\big(X_{n+1} = 1 \mid X_1 + \ldots + X_n = s\big)$?

On complique les choses à présent. La probabilité de succès du phénomène étudié ne nous étant pas connue, on la considère elle-même comme une variable aléatoire π à valeurs dans $[0, 1]$ et on fait les hypothèses suivantes :

— π suit la loi uniforme sur $\left\{ \dfrac{k}{N} \;\middle|\; k \in [\![0, N]\!] \right\}$,

— pour tous $k \in [\![0, N]\!]$ et $i \in [\![1, n+1]\!]$, la loi conditionnelle de X_i sachant que $\pi = \dfrac{k}{N}$ est la loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{k}{N}\right)$,

— pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes au sens de la probabilité conditionnelle $P_{\left\{\pi = \frac{k}{N}\right\}}$.

La première hypothèse sur π est un reflet de notre ignorance, mais aussi de notre absence de préjugés. En l'absence de connaissance sur sa valeur véritable, on considère que toute valeur de π est aussi probable qu'une autre. Les univers étant finis en MPSI, on se restreint de fait à des valeurs rationnelles de π de la forme $\dfrac{k}{N}$, mais ce n'est pas trop restrictif car N est très grand, ce qui offre à π une vaste plage de valeurs possibles.

La troisième hypothèse énonce que les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes dès lors qu'on fixe la valeur de π. Pour $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{0,1\}$, il n'est pas vrai a priori que : $P(X_1=\varepsilon_1,\ \ldots,\ X_n=\varepsilon_n)=P(X_1=\varepsilon_1)\ldots P(X_n=\varepsilon_n)$, mais il l'est en revanche que : $P_{\left\{\pi=\frac{k}{N}\right\}}(X_1=\varepsilon_1,\ \ldots,\ X_n=\varepsilon_n)=P_{\left\{\pi=\frac{k}{N}\right\}}(X_1=\varepsilon_1)\ldots P_{\left\{\pi=\frac{k}{N}\right\}}(X_n=\varepsilon_n)$.

2) Montrer que pour tout $j \in [\![1,n+1]\!]$: $P(X_1=1,\ \ldots,\ X_j=1)=\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^j$.

3) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{N}\right)\right)\mathrm{d}x$.

b) Justifier l'existence du réel $\|f'\|_\infty$, puis montrer que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$.

4) Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P\big(X_{n+1}=1 \mid X_1+\ldots+X_n=n\big)=\frac{n+1}{n+2}$.

5) On pose pour tous $a,b\in\mathbb{N}$: $I(a,b)=\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x$.

a) Exprimer $I(a,b)$ en fonction de $I(a+1,b-1)$ pour tous $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que pour tous $a,b\in\mathbb{N}$: $I(a,b)=\dfrac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$.

6) a) Montrer que : $P\big(X_1+\ldots+X_n=s\big)=\dbinom{n}{s}\times\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^s\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-s}$.

b) En déduire la *loi de succession de Laplace* : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P\big(X_{n+1}=1 \mid X_1+\ldots+X_n=s\big)=\frac{s+1}{n+2}$.

3 Le lemme de Schwartz-Zippel

1) Soient f une fonction polynomiale de degré $d\in\mathbb{N}$ à coefficients complexes, S une partie finie non vide de $\mathbb{C}$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur S. Montrer que $P\big(f(X)=0\big)\leqslant\dfrac{d}{|S|}$.

2) Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille presque nulle mais non nulle de nombres complexes, S une partie finie non vide de $\mathbb{C}$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur S. On note f la fonction polynomiale de deux variables $(x,y)\longmapsto\displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}x^iy^j=\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)\,y^j$ où on a noté f_j la fonction $x\longmapsto\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}x^i$ pour tout $j\in\mathbb{N}$.

On pose $d=\max\big\{i+j \mid\ i,j\in\mathbb{N},\ a_{ij}\neq 0\big\}$ et $k=\max\big\{j\in\mathbb{N} \mid\ \exists\, i\in\mathbb{N},\ a_{ij}\neq 0\big\}$. L'entier d appelé le *degré de f*.

a) Justifier les inégalités : $P\big(f_k(X)=0\big)\leqslant\dfrac{d-k}{|S|}$ et $P\big(f(X,Y)=0,\ f_k(X)\neq 0\big)\leqslant\dfrac{k}{|S|}$.

b) En déduire que $P\big(f(X,Y)=0\big)\leqslant\dfrac{d}{|S|}$.

3) Et maintenant, on généralise ! Soient $\big(a_{i_1,\ldots,i_n}\big)_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}}$ une famille presque nulle mais non nulle de nombres complexes, S une partie finie non vide de $\mathbb{C}$ et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur S.

On note f la *fonction polynomiale de n variables* $(x_1,\ldots,x_n)\longmapsto\displaystyle\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$, dont le *degré* est par définition l'entier $d=\max\big\{i_1+\ldots+i_n \mid\ i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ a_{i_1,\ldots,i_n}\neq 0\big\}$.

Montrer le *lemme de Schwartz-Zippel* : $P\big(f(X_1,\ldots,X_n)=0\big)\leqslant\dfrac{d}{|S|}$.