Processus de Galton-Watson et dés de Sicherman

Dans ce devoir, l'indéterminée des polynômes manipulés sera notée T plutôt que X, car la lettre X sera utilisée pour désigner des variables aléatoires.

1 Polynôme générateur d'une variable aléatoire

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini, on appelle *polynôme générateur de X* le polynôme G_X défini par : $G_X = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\ T^k$. Comme toujours, la somme infinie est ici finie car X est définie sur un espace probabilisé fini.

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini.

- **a)** Que valent $G_X(1)$ et $G_X'(1)$?
- **b)** Déterminer une expression de $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de G_X.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ définie sur un espace probabilisé fini. Déterminer une expression explicite de G_X et retrouver les expressions de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ énoncées en cours.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé fini. Montrer qu'alors : $G_{X+Y} = G_X G_Y$. On admettra que ce résultat peut être étendu à un nombre fini quelconque de variables aléatoires indépendantes.

2 Le processus de Galton-Watson

Le *processus de Galton-Watson* présenté dans cette partie est un modèle usuel en dynamique des populations. À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il a été utilisé par Sir Francis Galton pour étudier la transmission des patronymes en Angleterre, transmis de père en fils.

On se donne une fois pour toutes des réels $p_0, \ldots, p_N \in [0,1]$ avec $N \geqslant 2$ pour lesquels : $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$ et qui vont nous servir de loi de probabilité. On suppose en outre que : $p_0 + p_1 < 1$.

On s'intéresse au départ à un individu qui a un certain nombre de fils. Chacun de ces fils a lui-même indépendamment des autres individus un certain nombre de fils, qui ont eux-mêmes un certain nombre de fils, et ainsi de suite. Pour modéliser cette situation, on se donne une famille $(X_{n,i})_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé Ω et de même loi définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0,N]\!], \quad P(X_{n,i}=k) = p_k.$$

On pose alors pour tout $\omega \in \Omega$: $Z_0(\omega) = 1$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$: $Z_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si : } Z_n(\omega) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si : } Z_n(\omega) \geqslant 1. \end{cases}$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus de la $n^{\text{ème}}$ génération — de la $n^{\text{ème}}$ génération exactement, on ne tient plus compte des générations précédentes — et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_{n,i}$ représente le nombre de fils du $i^{\text{ème}}$ individu de la $n^{\text{ème}}$ génération.

On **admet** que les variables aléatoires Z_n et $X_{n,i}$, i décrivant $\mathbb{N}^*$, sont indépendantes.

4) On pose pour tous $n,k \in \mathbb{N}$: $S_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si : } k=0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_{n,i} & \text{si : } k \geqslant 1. \end{cases}$ On note en outre Γ le polynôme générateur commun des variables aléatoires $X_{n,i}$, (n,i) décrivant $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et m leur espérance commune.

a) Expliciter G_{Z_0} et Γ, puis $G_{S_{n,k}}$ pour tous $n,k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que Z_n est à valeurs dans $[\![0, N^n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ \Gamma$ (*formule de Wald*), puis que : $G_{Z_{n+1}} = \Gamma \circ G_{Z_n}$.

d) En déduire une expression explicite de $\mathrm{E}(Z_n)$ en fonction de n et m pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) On parle d'*extinction* de la famille étudiée lorsque : $Z_n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = P(Z_n = 0)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \Gamma(u_n)$.

b) Étudier la monotonie de la fonction Γ sur $[0,1]$ et montrer que la fonction Γ' est strictement croissante sur $[0,1]$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

d) En déduire, en fonction de m, le nombre de points fixes de la fonction Γ dans $[0,1[$.

e) En déduire la valeur de ℓ, puis interpréter le résultat.

3 Les dés de Sicherman

Cette dernière partie est facultative.

6) On lance une fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note D le numéro obtenu. Déterminer la factorisation irréductible de G_D sur $\mathbb{R}$.

On lance à présent une fois deux dés équilibrés à 6 faces dont les faces sont numérotées par des entiers naturels non nuls. Le résultat du premier dé est noté X, celui du deuxième Y. On se pose alors la question suivante : est-il possible de numéroter ces dés autrement que de 1 à 6, mais de telle sorte que leur somme $X+Y$ aient la même loi que s'ils avaient été numérotés de 1 à 6 ? On ne s'attend pas forcément à ce que les deux dés portent la même numérotation.

7) On se donne une numérotation des deux dés pour laquelle la somme $X+Y$ a la même loi que celle qu'elle aurait si les dés avaient été numérotés de 1 à 6.

a) Montrer l'égalité : $G_{X+Y} = \dfrac{1}{36}\, T^2(T+1)^2\big(T^2+T+1\big)^2\big(T^2-T+1\big)^2$.

b) Montrer que les polynômes G_X et G_Y sont divisibles par T.

c) Montrer que les polynômes $6G_X$ et $6G_Y$ sont à coefficients dans $\mathbb{N}$.

8) Montrer finalement qu'il existe, en dehors de la numérotation traditionnelle, une et une seule autre numérotation qui réponde à la question posée, appelée *numérotation de Sicherman*.