Promenade dénombrable

1 Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ et ses alentours

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Ce résultat justifie la bonne définition de l'application $(m,n) \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$ de $\mathbb{N}^2$ **dans** $\mathbb{N}$. On se propose de montrer que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

2) Proposer une illustration graphique de la bijectivité de f.

3) **a)** Exprimer $f(m,n+1)$ en fonction de $f(m+1,n)$, puis $f(n+1,0)$ en fonction de $f(0,n)$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

4) **a)** Montrer que pour tous $m,m',n,n' \in \mathbb{N}$: $\quad m'+n' \geqslant m+n+1 \quad \Longrightarrow \quad f(m',n') > f(m,n)$.

b) En déduire que f est injective sur $\mathbb{N}^2$.

5) **a)** Proposer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ — ou de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$, au choix.

b) Soient A,B,A',B' des ensembles, φ une bijection de A sur A' et ψ une bijection de B sur B'. Montrer que l'application $(x,y) \longmapsto \big(\varphi(x),\psi(y)\big)$ est une bijection de $A \times B$ sur $A' \times B'$.

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^p$ est équipotent à $\mathbb{N}$, i.e. qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}^p$ — ou de $\mathbb{Z}^p$ sur $\mathbb{N}$, au choix.

2 Réunions au plus dénombrables d'ensembles au plus dénombrables

On commence par une définition.

Définition (Ensemble dénombrable/au plus dénombrable/indénombrable) Soit E un ensemble.

- On dit que E est *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, i.e. s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
- On dit que E est *au plus dénombrable* s'il est vide ou s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.
- On dit que E est *indénombrable* s'il n'est pas au plus dénombrable.

Nous avons vu par exemple en cours que $\mathbb{R}$ est indénombrable. On peut montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable — mais comme aucune définition propre des ensembles finis n'a été donnée jusqu'ici, cette remarque n'est qu'une simple intuition.

6) Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides au plus dénombrables. Par hypothèse, il existe une injection φ_i de A_i dans $\mathbb{N}$ pour tout $i \in I$.

On pose : $\quad U = \bigcup_{i\in I} A_i \quad$ et pour tout $x \in U$: $\quad m_x = \min\big\{i \in I \mid \ x \in A_i\big\} \quad$ et $\quad \theta(x) = \big(m_x, \varphi_{m_x}(x)\big)$.

a) Justifier la bonne définition de m_x pour tout $x \in U$.

b) Montrer que θ est injective.

c) En déduire que U est au plus dénombrable.

7) Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables. Montrer que la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.

En résumé, toute réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est elle-même au plus dénombrable.

3 Application à la sommabilité des réels positifs

Cette dernière partie, facultative, vise surtout à vous faire manipuler des bornes supérieures.

La sommation d'un nombre **fini** de réels est toujours possible sans qu'on ait à se préoccuper de l'ordre dans lequel on les additionne grâce à la *commutativité* et à l'*associativité* de l'addition, i.e. grâce au fait que pour tous $x,y,z \in \mathbb{C}$: $x+y=y+x$ et $x+(y+z)=(x+y)+z$. On a parfois sommé un nombre **infini** de réels, mais toujours dans un certain ordre et en justifiant une convergence. Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ car : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Et si on additionnait maintenant un nombre quelconque de réels sans imposer aucun ordre de sommation ? On se limitera dans ce devoir à des réels **positifs (ou nuls)**, mais le travail qui suit peut être mené avec des réels quelconques, avec une définition différente cependant.

Définition (Famille sommable de réels positifs) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par un ensemble quelconque I. On pose : $\displaystyle\sum (x_i)_{i\in I} = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} x_j$ où la borne supérieure est **calculée dans** $[0,+\infty]$ et où $\mathscr{P}_f(I)$ est l'ensemble des parties **finies** de I.

On dit alors que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *sommable* si : $\sum (x_i)_{i\in I} < +\infty$, autrement dit si $\sum (x_i)_{i\in I}$ est un réel.

8) a) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par un ensemble **fini** I. Montrer que cette famille est sommable et que : $\displaystyle\sum (x_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} x_i$.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et que : $\displaystyle\sum (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, où l'on rappelle que par définition : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$.

9) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble quelconque I.
On pose : $S = \left\{ i \in I \mid x_i \neq 0 \right\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \left\{ i\in I \;\middle|\; x_i \geqslant \frac{1}{n} \right\}$.

a) Montrer que S_n est un ensemble fini pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Exprimer S en fonction des S_n, n décrivant $\mathbb{N}$, puis montrer que S est au plus dénombrabble.

10) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs — sommable ou non — et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

a) Montrer que : $\sum \left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \leqslant \sum (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) En déduire que l'inégalité de la question **a)** est une égalité.

Avez-vous compris l'intérêt de la question **8)** ? On y montre que la notation « $\sum (x_i)_{i\in I}$ » généralise toutes les notations $\sum$ connues jusqu'ici — du moins pour des réels positifs. Dans ces conditions, on note en réalité $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ la borne supérieure notée provisoirement $\sum (x_i)_{i\in I}$. C'est quand même plus naturel.

La question **9)** montre quant à elle que la somme d'un nombre indénombrable de réels strictement positifs vaut toujours $+\infty$. La question **10)**, enfin, énonce proprement qu'une somme de réels positifs en nombre fini ou infini ne dépend jamais de l'ordre dans lequel on les additionne.

Vous étudierez plus en détail les familles sommables en deuxième année si vous allez en MP, mais pas si vous allez en PSI. Dans le cas des familles de réels positifs, la théorie affirme que toute opération raisonnable est autorisée : linéarité, permutation des $\sum$, permutation des termes, regroupement par paquets… Cette absence de contrainte offre une grande légèreté de calcul, mais les calculs sont effectués dans $[0,+\infty]$.

Voici pour finir un petit exemple de calcul que je ne détaille pas trop. Essayez de comprendre !

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \overset{\text{Calcul 1}}{=} \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\overset{\text{Calcul 2}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \\ p+q^2=n}} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}^* \\ q^2\leqslant n}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}.$$

Conclusion : $\displaystyle\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}.}$