PROMENADE MATRICIELLE

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 DEUX FOIS DES PUISSANCES

On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer les puissances de A de deux façons différentes.

1) a) Déterminer deux réels λ et μ pour lesquels : $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.

b) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

c) Montrer l'existence de deux suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = \lambda_n A + \mu_n I_3$.

d) Déterminer une expression explicite de λ_n et μ_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) En déduire une expression explicite coefficient par coefficient de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Résoudre le système linéaire : $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$, puis en exhiber deux solutions X_1 et X_2 de la forme : $X_1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ admet $(0,0,0)$ pour seule solution.

On pose à présent : $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on note P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de colonnes X_1, X_2, X_3.

c) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

d) Montrer que pour une certaine matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser : $AP = PT$.

e) Pourquoi T est-elle inversible ? Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f) Retrouver enfin le résultat de la question **1)e)**.

2 VERTUS DE LA TRACE

1) Montrer que pour toute matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si : $A = 0$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que : $M\,{}^{t}MM = I_n$.

2) a) Montrer que pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$: $({}^{t}MM)^p = I_n$. En déduire que M est inversible et symétrique, puis calculer M^3.

On pose : $a = \operatorname{tr}(M)$ et $b = \operatorname{tr}(M^2)$.

b) Exprimer : $\operatorname{tr}((M - I_n)^2)$, $\operatorname{tr}\big((M^2 - I_n)^2\big)$ et $\operatorname{tr}\big((M^2 - M)^2\big)$ en fonction de a et b.

c) En déduire l'égalité : $a = b = n$, puis que : $M = I_n$.