Quadratude de Gauss-Legendre

1 Interpolation de Hermite de degré minimal

Soient $x_1, \ldots, x_n \in [-1,1]$ **distincts**. On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1, \ldots, x_n$.

1) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $B_i \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ pour lequel pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $B_i(x_j) = 0$ et $B_i'(x_j) = \delta_{ij}$. On donnera une expression explicite de B_i en fonction de L_i notamment.

b) Montrer que le polynôme : $A_i = L_i^2 - 2\,L_i'(x_i)\,B_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ pour lequel pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $A_i(x_j) = \delta_{ij}$ et $A_i'(x_j) = 0$.

2) Montrer que la famille $\big(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

3) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$, il existe un et un seul polynôme $H_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ pour lequel pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $H_f(x_i) = f(x_i)$ et $H_f'(x_i) = f'(x_i)$.

On rappelle en vue des parties qui suivent que dans le cadre de l'interpolation de Lagrange de degré minimal, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$, il existe un et un seul polynôme $L_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour lequel pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $L_f(x_i) = f(x_i)$.

2 Polynômes de Legendre

On pose : $\Lambda = \big(X^2-1\big)^n$. On appelle $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Legendre* le polynôme $\Lambda^{(n)}$.

4) a) Montrer que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$: $\Lambda^{(i)}(-1) = \Lambda^{(i)}(1) = 0$.

b) En déduire que $\Lambda^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que ses racines appartiennent toutes à $]-1,1[$.

5) a) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \Lambda^{(n)}(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-1}^{1} \Lambda(x)Q^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x$ où l'on a noté R le reste de la division euclidienne de P par $\Lambda^{(n)}$.

6) On pose pour tous $p,q \in \mathbb{N}$: $\displaystyle I(p,q) = \int_{-1}^{1} (x-1)^p(x+1)^q\,\mathrm{d}x$.

a) Exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$.

b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression explicite de $I(k,k)$ en fonction de k.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \Lambda^{(n)}(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1}$.

3 Méthode de quadratude de Gauss-Legendre

Dans cette partie, exploitant le résultat de la question **4)b)**, on note $x_1, \ldots, x_n$ les n racines distinctes de $\Lambda^{(n)}$ rangées dans l'ordre croissant. On reprend les notations de la partie **1** et on pose pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\lambda_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$.

On fixe une fonction $f \in \mathscr{C}^{2n}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$.

7) **a)** Que vaut le reste de la division euclidienne de H_f par $\Lambda^{(n)}$? En déduire que : $\int_{-1}^{1} H_f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} L_f(x)\,\mathrm{d}x.$

b) Exprimer $\int_{-1}^{1} H_f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction des réels $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de f.

8) Soit $x \in [-1,1]$ distinct de $x_1, \ldots, x_n$.

a) Déterminer un réel A pour lequel la fonction $t \overset{\varphi}{\longmapsto} f(t) - H_f(t) - A\Lambda^{(n)}(t)^2$ s'annule en x.

b) Montrer que : $\Big(\big(\Lambda^{(n)}\big)^2\Big)^{(2n)} = \dfrac{(2n)!^3}{n!^2}.$

c) En déduire que pour un certain $c \in\,]-1,1[$: $f(x) - H_f(x) = \dfrac{n!^2 f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3}\,\Lambda^{(n)}(x)^2.$

9) Montrer que : $\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant \dfrac{2^{2n+1}\big\|f^{(2n)}\big\|_\infty}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)!}.$

Pour $n=3$, un simple calcul montre que : $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, puis que : $\lambda_1 = \lambda_3 = \dfrac{5}{9}$ et $\lambda_2 = \dfrac{8}{9}$.

Le résultat de la question **9)a)** montre alors que pour $r = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$: $\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \dfrac{5}{9}\,f(-r) - \dfrac{8}{9}\,f(0) - \dfrac{5}{9}\,f(r)\right| \leqslant \dfrac{\big\|f^{(6)}\big\|_\infty}{15750}.$

En résumé : $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \dfrac{5}{9}\,f(-r) + \dfrac{8}{9}\,f(0) + \dfrac{5}{9}\,f(r).$

Pour finir, la *formule de Wallis* montre que lorsque n est grand : $\dbinom{2n}{n} \approx \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$, donc :

$$\frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}^2(2n+1)!} \approx \frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\right)^2(2n+1)!} \approx \frac{2n\pi}{2^{2n}(2n+1)!} \approx \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!}.$$

C'est tout petit !