Qualité numérique de l'interpolation de Lagrange

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste verte : questions **1)** à **4)**.

— Piste bleue : questions **1)** à **7)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel non nul, a, b, $x_0, \ldots, x_n$ sont des réels pour lesquels $a \leqslant x_0 < \ldots < x_n \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On note $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_0, \ldots, x_n$ et P_n le polynôme d'interpolation de degré minimal de f aux points $x_0, \ldots, x_n$, i.e. l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad P(x_k) = f(x_k)$.

La fonction f et son polynôme interpolateur P_n coïncident en $x_0, \ldots, x_n$, mais jusqu'où sont-ils proches sur $[a,b]$ tout entier ? Ce devoir se donne pour objectif de mesurer la distance uniforme $\|f - P_n\|_\infty$ qui les sépare sur $[a,b]$. Comme on va le voir, le choix des points d'interpolation $x_0, \ldots, x_n$ est loin d'être anodin, certains choix sont pertinents, d'autres sont mauvais. Dans les bons cas, le polynôme P_n pourra être rendu aussi proche que l'on veut de la fonction f lorsque n tend vers $+\infty$.

1) Rappeler l'expression de P_n en fonction des polynômes $L_0, \ldots, L_n$.

1 De l'importance de bien choisir les points

Dans cette partie, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.

2) a) Soit $x \in [a,b]$ distinct de $x_0, \ldots, x_n$. Pour quel réel A la fonction $t \longmapsto f(t) - P_n(t) - A\,(t-x_0)\ldots(t-x_n)$ s'annule-t-elle en x ? Montrer que pour un certain $c \in [a,b]$: $\quad f(x) - P_n(x) = \dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$.

b) Justifier l'existence des réels $m_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} |x-x_0|\ldots|x-x_n|$ et $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$, puis montrer que :

$$\|P_n - f\|_\infty \leqslant \frac{m_{n+1}}{(n+1)!}\, \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

c) Montrer que $m_{n+1} \leqslant (b-a)^{n+1}$.

Dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, l'inégalité de la question **b)** montre la distance uniforme de P_n à f peut être majorée par le produit de deux termes, l'un $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ qui dépend de f mais pas des points $x_0, \ldots, x_n$ et l'autre m_{n+1} qui dépend de ces points mais pas de f. Une question naturelle se pose alors — pour quelles valeurs des points $x_0, \ldots, x_n$ la quantité m_{n+1} est-elle petite, voire minimale ? Certains choix de $x_0, \ldots, x_n$ vont s'avérer plus fructueux que d'autres.

2 Interpolation de Lagrange optimale

3) Dans cette question : $\quad a = -1, \quad b = 1 \quad$ et $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n+2}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

On rappelle que le $(n+1)^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev* T_{n+1} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos\big((n+1)\,\theta\big) = T_{n+1}(\cos\theta)$. $\quad$ En outre : $\quad T_{n+1} = 2^n\,(X-x_0)\ldots(X-x_n)$.

a) Déterminer le maximum de $|T_{n+1}|$ sur $[-1,1]$, puis les points en lesquels il est atteint. Que vaut T_{n+1} en ces points ?

b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n+1$, le maximum de $|P|$ sur $[-1,1]$ est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2^n}$.

En d'autres termes, parmi les polynômes unitaires de degré n, $\dfrac{T_{n+1}}{2^n}$ a le plus petit maximum possible sur $[-1,1]$ en valeur absolue. Pour une interpolation de Lagrange sur $[-1,1]$, les meilleurs points d'interpolation $x_0, \ldots, x_n$ qu'on puisse choisir sont les racines de T_{n+1}.

4) Dans cette question, a et b sont de nouveau quelconques et $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\,\cos\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2n+2}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

a) Déterminer l'image de $[a,b]$ par la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$.

b) Montrer que $m_{n+1} \leqslant 2\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$.

3 Interpolation de Lagrange à pas constant

L'interpolation de Lagrange à pas constant consiste à choisir les réels $x_0, \ldots, x_n$ régulièrement espacés dans l'intervalle $[a, b]$. Le réel $h = \dfrac{b-a}{n}$ est appelé le *pas* de la subdivision et on pose donc $x_k = a + kh$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On compare dans cette partie la valeur de m_{n+1} que ce nouveau choix de réels $x_0, \ldots, x_n$ impose à la valeur optimale de la partie **2**.

On note φ la fonction $t \longmapsto |t| \times |t-1| \times \ldots \times |t-n|$ sur $[0, n]$.

5) **a)** Exprimer pour tout $x \in [a, b]$ le réel $|x - x_0| \ldots |x - x_n|$ à l'aide de la fonction φ. En déduire, après avoir justifié la bonne définition du maximum, que $m_{n+1} = h^{n+1} \max\limits_{t \in [0,n]} \varphi(t)$.

b) Montrer que $\varphi(n-t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, n]$ et que $\varphi(t) < \varphi(t-1)$ pour tout $t \in \left[1, \dfrac{n}{2}\right]$ non entier.

c) En déduire que φ atteint son maximum dans $[0, 1]$, puis que $m_{n+1} \leqslant n! \left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1}$.

d) En étudiant $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$, montrer que $m_{n+1} \geqslant \dfrac{n!}{4n} \left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1}$.

6) **a)** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \ln k$.

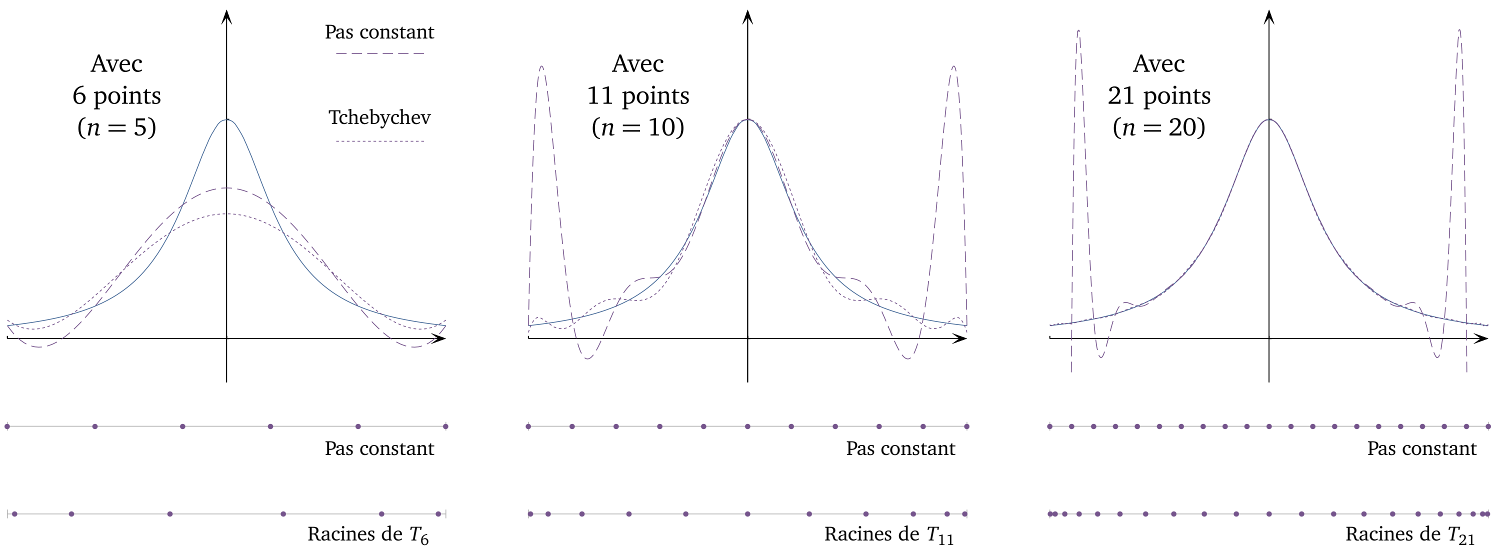
b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $p! \geqslant \left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$.

c) En déduire que $m_{n+1} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{4n^2} \left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.

7) **a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto (x+1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - 1$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{p^{p+1}}{p!\, \mathrm{e}^p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, puis que $m_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2 \left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.

Les questions **6)** et **7)** montrent que m_{n+1} a pour ordre de grandeur $\left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$ dans le cas d'un pas constant. C'est nettement mieux que le majorant grossier $(b-a)^{n+1}$ de la partie **1** valable pour tout choix de points $x_0, \ldots, x_n$, mais nettement moins bien que le majorant optimal $\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$ de la partie **2**. Les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1} sont ainsi réellement plus efficaces que des points équidistants en termes d'interpolation. Les figures qui suivent illustrent cette différence d'efficacité dans le cas de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+16x^2}$ sur $[-1, 1]$. On démontre dans la partie suivante que quand on calcule P_n à partir des racines de T_{n+1}, la norme infinie $\|P_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ce résultat de convergence est faux dans le cas d'une interpolation à pas constant. L'écart entre P_n et f explose dans ce cas autour de -1 et 1 lorsque n tend vers $+\infty$ (*phénomène de Runge*). Les racines de T_{n+1} sont présentes en plus grand nombre autour de -1 et 1 qu'au milieu de l'intervalle et cette meilleure disposition empêche $\|P_n - f\|_\infty$ d'exploser.



4 Convergence dans le cas Tchebychev

Dans cette partie, de nouveau : $a = -1$, $b = 1$ et $x_k = \cos\theta_k$ où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1, 1]$. On va démontrer sous cette hypothèse que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers f sur* $[-1, 1]$, i.e. que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|P_n - f\right\|_\infty = 0$. Le résultat reste vrai si f est seulement continue, mais la preuve est plus difficile. Le résultat peut par ailleurs être étendu à tout segment $[a, b]$ par un travail analogue à celui de la question **4)**.

8) On pose $S_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \sin\theta_p$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $S_k = (-1)^k \times \dfrac{\sin\dfrac{(k+1)\pi}{n+1}}{2\cos\dfrac{\pi}{2n+2}}$. Que vaut S_n ?

b) En déduire que $\left|S_k\,(x_k - x_{k+1})\right| \leqslant \dfrac{\pi}{n+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

c) Montrer que pour tous $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin\theta_k \times a_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k\,(a_k - a_{k+1})$.

9) **a)** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $f(x) - P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(f(x) - f(x_k)\big)\,L_k(x)$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $T_{n+1} = T'_{n+1}(x_k)\,(X - x_k)\,L_k$ et $T'_{n+1}(x_k) = \dfrac{(-1)^k\,(n+1)}{\sin\theta_k}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$: $f(x) - P_n(x) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin\theta_k \int_0^1 f'\big((1-t)\,x_k + t x\big)\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que $\left\|P_n - f\right\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi\,\|f''\|_\infty}{2\,(n+1)}$.

Le résultat de la question **9)b)** montre comme annoncé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|P_n - f\right\|_\infty = 0$.

En passant, un cas particulier du très important *théorème de Weierstrass* vient d'être démontré — toute fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un **segment** est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales — et le résultat est vrai en fait d'une fonction seulement continue.