Qualité numérique de l'interpolation de Lagrange

1 Position du problème

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et des réels $x_0, \ldots, x_n$ pour lesquels : $a \leqslant x_0 < \ldots < x_n \leqslant b$. On note $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ les polynômes de Lagrange de $x_0, \ldots, x_n$ et L_f le polynôme : $L_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \Lambda_i$.

1) a) Que peut-on dire du degré de L_f ?

b) Soit $x \in [a,b]$ distinct de $x_0, \ldots, x_n$. Pour quel réel A la fonction $t \longmapsto f(t) - L_f(t) - A(t-x_0)\ldots(t-x_n)$ s'annule-t-elle en x ? Montrer alors que pour un certain $c \in [a,b]$: $f(x) - L_f(x) = \dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$.

c) Justifier l'existence des réels : $m_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]}\big(|x-x_0|\ldots|x-x_n|\big)$ et $\big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty = \max\limits_{[a,b]}\big|f^{(n+1)}\big|$, puis montrer que pour tout $x \in [a,b]$: $\big|f(x) - L_f(x)\big| \leqslant \dfrac{m_{n+1}}{(n+1)!}\, \big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty$ $\quad\bigstar$.

d) En déduire que pour tout $x \in [a,b]$: $\big|f(x) - L_f(x)\big| \leqslant \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, \big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty$.

La majoration de la question **d)** mesure l'écart entre f et son polynôme interpolateur L_f et présente l'avantage de ne pas dépendre des points $x_0, \ldots, x_n$. En ce sens, c'est une majoration « dans le pire des cas ». Il y a peut-être des bons choix et des mauvais choix de points $x_0, \ldots, x_n$, la majoration : $m_{n+1} \leqslant (b-a)^{n+1}$ est toujours valable.

L'inégalité $\bigstar$ est plus fine de ce point de vue. Elle montre de quelle manière l'écart entre f et L_f, s'il dépend de f à travers $\big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty$, dépend aussi des points $x_0, \ldots, x_n$. Pour quels valeurs de ces points la quantité m_{n+1} est-elle minimale ? C'est à cette question que les parties suivantes vont tenter de répondre.

2 Interpolation de Lagrange optimale

On rappelle que le $(n+1)^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev* T_{n+1} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos\big((n+1)\theta\big) = T_{n+1}(\cos\theta)$. Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$, et plus précisément : $T_{n+1} = 2^n \prod_{k=0}^{n}\left(X - \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$.

On notera $\widetilde{T_{n+1}}$ le polynôme $\prod_{k=0}^{n}\left(X - \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$.

2) a) Déterminer le maximum de $\big|\widetilde{T_{n+1}}\big|$ sur $[-1,1]$, puis les points en lesquels il est atteint. Que vaut $\widetilde{T_{n+1}}$ en ces points ?

b) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n+1$, le maximum de $|P|$ sur $[-1,1]$ est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2^n}$. On pourra raisonner par l'absurde et s'intéresser aux racines de $\widetilde{T_{n+1}} - P$.

Le résultat de la question **2)b)** montre que, parmi les polynômes unitaires de degré n, c'est $\widetilde{T_{n+1}}$ qui a le plus petit maximum possible sur $[-1,1]$ en valeur absolue. Pour une interpolation de Lagrange sur $[-1,1]$, le meilleur choix de points d'interpolation qu'on puisse faire est donc celui des réels : $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$, k décrivant $[\![0,n]\!]$.

3) On pose à présent pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$.

a) Déterminer l'image de $[a,b]$ par la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$.

b) Montrer l'inégalité : $\big|f(x) - L_f(x)\big| \leqslant \dfrac{2}{(n+1)!}\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1} \big\|f^{(n+1)}\big\|_\infty$.

Comme on vient de le montrer, cette inégalité d'approximation est la meilleure qu'on puisse obtenir pour une interpolation de Lagrange. Par rapport aux résultats de la partie **1**, le majorant $(b-a)^{n+1}$ a été remplacé par $\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$ et on ne peut pas espérer mieux.

3 Interpolation de Lagrange à pas constant

L'interpolation de Lagrange à pas constant consiste à choisir les réels $x_0, \dots, x_n$ régulièrement espacés dans l'intervalle $[a, b]$. Le réel : $h = \dfrac{b-a}{n}$ est appelé le *pas* de la subdivision et on pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $x_k = a + kh$. On va comparer dans cette partie la valeur de m_{n+1} que ce nouveau choix des réels $x_0, \dots, x_n$ impose à la valeur optimale de la partie **2.**

On notera φ la fonction $t \longmapsto \displaystyle\prod_{k=0}^{n} |t-k|$ sur $[0, n]$.

4) a) Exprimer pour tout $x \in [a, b]$ le réel $|x - x_0| \dots |x - x_n|$ comme une valeur de φ. En déduire, après avoir justifié que φ possède un maximum sur $[0, n]$, que : $m_{n+1} = h^{n+1} \max\limits_{t \in [0,n]} \varphi(t)$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, n]$: $\varphi(n-t) = \varphi(t)$ et que pour tout $t \in \left[1, \dfrac{n}{2}\right]$ non entier : $\varphi(t) < \varphi(t-1)$.

c) En déduire que φ atteint son maximum dans $[0, 1]$.

d) En déduire l'inégalité : $m_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$.

e) En étudiant $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$, montrer l'inégalité : $m_{n+1} \geqslant \left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1} \dfrac{n!}{4n}$.

5) a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \ln k$.

b) En déduire, en additionnant les inégalités de la question **a)**, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $p! \geqslant \left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$.

c) En déduire l'inégalité : $m_{n+1} \geqslant \left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \dfrac{\mathrm{e}}{4n^2}$.

6) a) Montrer que la fonction $x \longmapsto (x+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - 1$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par : $u_p = \ln \dfrac{p^{p+1}}{p!\mathrm{e}^p}$ est croissante.

c) En déduire l'inégalité : $m_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^2$.

Les questions **5)** et **6)** montrent que m_{n+1} a pour ordre de grandeur $\left(\dfrac{b-a}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$. C'est nettement mieux que le majorant grossier $(b-a)^{n+1}$ de la partie **1**, mais aussi nettement moins bien que le majorant optimal $\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$ de la partie **2.** Les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1} sont ainsi réellement plus efficaces que des points équidistants en termes d'interpolation. Les figures qui suivent illustrent cette différence d'efficacité. Dans le cas des racines de T_{n+1}, on peut montrer que le polynôme L_f « tend vers f » lorsque n tend vers $+\infty$ — avec une notion de limite adaptée aux suites de fonctions alors que nous ne connaissons, nous, que les limites de suites de nombres. Ce résultat de convergence est faux en général dans le cas d'une interpolation à pas constant.

Sur les figures qui suivent, f est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+16x^2}$ sur $[-1, 1]$.