RÉDUCTION DE JORDAN D'UNE MATRICE NILPOTENTE

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ — non, ce **NE** sont **PAS** les matrices J_r introduites en cours !

Comme toujours, par ailleurs : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On souhaite établir le résultat suivant.

Théorème (Réduction de Jordan d'une matrice nilpotente) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Alors N est semblable à la matrice diagonale par blocs : $\begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r} \end{pmatrix}$ pour certains $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^*$ avec : $n = n_1 + \ldots + n_r$.
Cette mise en forme de N est appelée sa *réduction de Jordan*.

1 PRÉLIMINAIRES

1) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p.

a) Justifier l'existence d'un vecteur $U \in \mathbb{K}^n$ pour lequel : $N^{p-1}U \neq 0$.

b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}\big(U, NU, \ldots, N^{p-1}U\big)$ et en déduire l'inégalité : $p \leqslant n$.

2) Soit G un sous-espace vectoriel de dimension r de $\mathbb{K}^n$. On pose : $G^\perp = \Big\{X \in \mathbb{K}^n /\quad \forall Y \in G, \quad {}^tXY = 0\Big\}$.

a) Que vaut la dimension de $G^\perp$ dans le cas où : $r = 0$?

On suppose désormais : $r \neq 0$.

b) Pourquoi peut-on se donner une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont les r premières colonnes forment une base de G ?

On pose alors : $B = {}^tA^{-1}$. On note en outre $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \ldots, B_n$ celles de B.

c) Que vaut : ${}^tB_iA_j$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$?

d) Montrer que $(B_{r+1}, \ldots, B_n)$ est une base de $G^\perp$. Que vaut donc la dimension de $G^\perp$?

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RÉDUCTION DE JORDAN

3) Initialisation : Montrer que le théorème de réduction de Jordan est vrai pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le théorème de réduction de Jordan vrai de toute matrice de taille strictement inférieure à n. Soit alors $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p.

Reprenant les notations de la question **1)**, on pose : $F = \mathrm{Vect}\big(U, NU, \ldots, N^{p-1}U\big)$.

4) Justifier l'existence d'un vecteur $V \in \mathbb{K}^n$ pour lequel : ${}^tU\,{}^tN^{p-1}V \neq 0$.

On pose : $G = \mathrm{Vect}\big(V, {}^tNV, \ldots, {}^tN^{p-1}V\big)$ et $G^\perp = \Big\{X \in \mathbb{K}^n /\quad \forall Y \in G, \quad {}^tXY = 0\Big\}$.

5) Montrer que N est semblable à J_n dans le cas où : $p = n$.

On peut supposer désormais grâce à **1)b)** que : $p \in [\![1, n-1]\!]$.

6) **a)** Montrer que F et $G^\perp$ sont en somme directe.

b) En déduire que F et $G^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

7) **a)** Montrer que F et $G^\perp$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à N.

b) En déduire que N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme : $\begin{pmatrix} N_1 & \\ & N_2 \end{pmatrix}$ pour certaines matrices $N_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $N_2 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ nilpotentes.

c) Conclure.

3 Une application

On va déduire du théorème de réduction de Jordan la caractérisation suivante de la nilpotence.

Théorème (Une caractérisation de la nilpotence) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est nilpotente.   (ii) M et $2M$ sont semblables.

8) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M et $2M$ sont semblables.

a) Justifier l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et de scalaires $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls pour lesquels d'une part la famille $\left(I_n, M, \ldots, M^{p-1}\right)$ est libre, et d'autre part : $M^p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k M^k$.

b) Montrer l'égalité : $2^p M^p = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k a_k M^k$?

c) En déduire que : $a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0$, puis que M est nilpotente.

9) **a)** Montrer que J_n et $2J_n$ sont semblables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, M et $2M$ sont semblables.