Riemann, Lebesgue, Dirichlet

Ce devoir est une introduction à la *théorie des séries de Fourier*, fondamentale autant en physique qu'en mathématiques.

1 Le lemme de Riemann-Lebesgue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$.

1) a) Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0.$

b) En déduire que pour tout $f \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$: $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).

En particulier : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$

2 Le théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on appelle $k^{\text{ème}}$ *coefficient de Fourier de f* le nombre complexe : $\displaystyle c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$. Également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\displaystyle x \stackrel{S_n}{\longmapsto} \sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ est appelée la $n^{\text{ème}}$ *somme de Fourier de f*. On pose enfin pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.

2) a) Simplifier D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en l'écrivant comme un quotient de sinus.

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose f dérivable en x et on pose, pour tout $t \in \left]0,\pi\right]$: $\displaystyle g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\sin\frac{t}{2}}$.

a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, puis que g est continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \;-\; f(x).$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,\mathrm{d}t.$

d) En déduire enfin l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$. Ce résultat est un cas particulier du *théorème de Dirichlet*. En résumé, si f est dérivable en x, alors : $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$

3 Un exemple pour comprendre

4) On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[0,2\pi[$ par : $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \left]0,2\pi\right[$: $f(x) = \pi - x$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$

Tâchons pour finir de visualiser le théorème de Dirichlet sur cet exemple. La fonction f est un signal 2π-périodique dont le graphe est représenté ci-dessous. La relation : $f(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ exprime le fait que le signal f peut être décomposé en une somme infinie de signaux sinusoïdaux de périodes : $\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\ldots$ affectés de coefficients plus ou moins grands, ici $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}\ldots$ Plus généralement, la théorie des séries de Fourier énonce des conditions pour qu'un signal périodique puisse être décomposé en somme de signaux sinusoïdaux.