# Séries de Engel

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

**1)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite, notée $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$, satisfait l'inégalité : $\quad 0 < \dfrac{1}{a_0} < [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \leqslant \dfrac{1}{a_0 - 1} \leqslant 1.$

**2)** Calculer $[p]_{n\in\mathbb{N}} = [p, p, \dots]$ pour tout entier $p \geqslant 2$.

**3)** On note $f$ la fonction $t \longmapsto t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor + t - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f(t) \in \,]0, t]$ pour tout $t \in \,]0, 1]$.

**4)** On souhaite montrer que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est *surjective de $\mathscr{A}$ sur* $]0, 1]$, i.e. que :

$$\forall x \in \,]0,1], \quad \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}, \quad x = [a_n]_{n\in\mathbb{N}}.$$

On se donne pour cela un réel $x \in \,]0, 1]$ et on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive. Est-elle monotone ?

On pose à présent $a_n = \left\lfloor \dfrac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $x_{n+1} = a_n x_n - 1$, puis $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k}$.

**b)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{A}$.

**c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad x = S_n + \dfrac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$.

**d)** En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $x$.

Conclusion : $\quad x = [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad$ On appelle cette relation un *développement de $x$ en série de Engel*.

On montrera plus loin que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est également *injective sur $\mathscr{A}$*, i.e. que :

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}, \quad [a_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Cela prouvera l'unicité du développement en série de Engel.

**5)** On note $f_n$ la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ : $\quad f_n(x) - f_n(0) = -\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

**b)** En déduire que $\left|f_n(x) - 1\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^{|x|}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

**c)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\quad \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad$ et $\quad \mathrm{ch}\, x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$

**6)** **a)** Calculer $[n+2]_{n\in\mathbb{N}}$.

**b)** Montrer que : $\quad \mathrm{ch}\sqrt{2} - 2 = \big[(n+2)(2n+3)\big]_{n\in\mathbb{N}}$.

**7)** On rappelle qu'une suite est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

**a)** Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ stationnaire, $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est rationnel.

Pour la réciproque, on se donne un rationnel $x = \dfrac{p}{q} \in \,]0, 1]$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et on reprend les notations de la question **4)**.

**b)** Montrer que $qx_n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**c)** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

**8)** Montrer que les réels e et $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.

**9)** Cette dernière question est facultative. On souhaite montrer que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est injective sur $\mathscr{A}$.

**a)** Montrer que pour toutes suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$, si $b_0 < b'_0$ alors $[b_n]_{n\in\mathbb{N}} > [b'_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

**b)** Conclure. On pourra raisonner par l'absurde.