Séries de Engel

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \ldots a_k}$.

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite, notée $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$, satisfait l'inégalité : $0 < \frac{1}{a_0} < [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \leqslant \frac{1}{a_0 - 1} \leqslant 1$.

2) Calculer : $[p]_{n\in\mathbb{N}} = [p, p, \ldots]$ pour tout entier $p \geqslant 2$ fixé.

3) On note f la fonction $t \longmapsto t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + t - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $t \in]0,1]$: $f(t) \in]0,t]$.

4) On souhaite montrer que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est surjective de $\mathscr{A}$ sur $]0,1]$. On se donne pour cela un réel $x \in]0,1]$ et on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par : $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et décroissante.

On pose à présent pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$, de sorte que : $x_{n+1} = a_n x_n - 1$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $\mathscr{A}$.

On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \ldots a_k}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \ldots a_n}$.

d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite x.

Conclusion : $x = [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Cette écriture particulière de x est appelé un *développement de x en série de Engel*.

On montrera plus loin que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est également injective sur $\mathscr{A}$, ce qui prouvera l'unicité du développement en série de Engel pour un réel donné de $]0,1]$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) - f_n(0) = -\int_0^x \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\left|f_n(x) - 1\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, \mathrm{e}^{|x|}$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et $\mathrm{ch}\, x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

6) **a)** Calculer : $[n+2]_{n\in\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer l'égalité : $\mathrm{ch}\sqrt{2} - 2 = \big[(n+2)(2n+3)\big]_{n\in\mathbb{N}}$.

7) On dit qu'une suite réelle est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

a) Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ stationnaire, $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est rationnel.

Pour la réciproque, on se donne un rationnel : $x = \frac{p}{q} \in]0,1]$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et on reprend les notations de la question **2)**.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, qx_n est un entier.

c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis que c'est aussi le cas de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8) Montrer que les réels e et $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.

9) On souhaite enfin montrer que l'application $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est injective sur $\mathscr{A}$.

a) Montrer que pour toutes suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$, si : $b_0 < b'_0$ alors : $[b_n]_{n\in\mathbb{N}} > [b'_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. On suppose que : $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a'_n]_{n\in\mathbb{N}}$ et, par l'absurde, que : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pourquoi peut-on poser : $p = \min\left\{n \in \mathbb{N} / \quad a_n \neq a'_n\right\}$?

c) Conclure.