SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ DE RANG MAJORÉ

On fixe une fois pour toutes un entier naturel non nul n et $p \in [\![0, n]\!]$. On s'intéresse au résultat suivant, démontré par un certain Harley Flanders en 1962 :

Théorème (Sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang majoré) Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel pour tout $M \in \mathscr{V}$: $\mathrm{rg}(M) \leqslant p$. Alors : $\dim \mathscr{V} \leqslant np$.

On verra qu'en fait $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient toujours au moins un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension exactement np pour lequel pour tout $M \in \mathscr{V}$: $\mathrm{rg}(M) \leqslant p$.

1) Prouver le théorème dans les cas : $p = 0$ et $p = n$.

On suppose désormais : $p \neq 0$ et $p \neq n$.

1 UN EXEMPLE

Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$, on pose : $\mathscr{V}_F = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \quad F \subset \mathrm{Ker}\, M \right\}$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{V}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- **b)** Montrer que pour tout $M \in \mathscr{V}_F$: $\mathrm{rg}(M) \leqslant p$.

3) On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $e_{p+1}, \ldots, e_n$.

- **a)** Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n, notée $\varphi(M)$, dont les p premières colonnes sont celles de M et dont les $n-p$ suivantes sont nulles, est élément de $\mathscr{V}_E$.
- **b)** Montrer que l'application φ ainsi définie est un isomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{V}_E$.

4) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$. On introduit une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ dont les $n-p$ derniers vecteurs forment une base de F et on pose : $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$.

- **a)** Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $M \in \mathscr{V}_F \iff MP \in \mathscr{V}_E$.
- **b)** En déduire la dimension de $\mathscr{V}_F$.

2 UN LEMME

On note J la matrice carrée : $J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de taille n.

5) Soient $A \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$ et on suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathrm{rg}(M + \lambda J) \leqslant p$.

- **a)** Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, n-p]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

i) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & b_{1j} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & b_{pj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} & c_{ij} \end{pmatrix} \leqslant p,$ **ii)** puis que : $\lambda c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

- **b)** En déduire que : $AB = 0$ et $C = 0$.

3 Preuve du théorème

6) On note $\mathscr{X}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & C \end{pmatrix}$, (B, C) décrivant $\mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathscr{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la dimension de $\mathscr{X}$.

7) Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenant J et pour lequel pour tout $M \in \mathscr{V}$: $\quad \mathrm{rg}(M) \leqslant p$.

a) Montrer que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{X}$ sont en somme directe.

b) En déduire l'inégalité : $\quad \dim \mathscr{V} \leqslant np$.

8) Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel pour tout $M \in \mathscr{V}$: $\quad \mathrm{rg}(M) \leqslant p$. $\quad$ On ne suppose plus que : $J \in \mathscr{V}$. $\quad$ Montrer que dans ce cas également : $\quad \dim \mathscr{V} \leqslant np$.