SUITES DE CANTOR

On appelle *suite de Cantor* toute suite d'entiers $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle : $a_1 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \geqslant 2$: $a_k \in [\![0, k-1]\!]$.

1) Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cantor. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n$: $0 \leqslant A_p - A_n \leqslant \frac{1}{n!} - \frac{1}{p!}$.

b) En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $\widehat{a}$ sa limite : $\widehat{a} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n \leqslant \widehat{a} \leqslant A_n + \frac{1}{n!}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier N_n pour lequel : $N_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant n!\,\widehat{a} \leqslant N_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$.

2) Soit $\ell \in [-1, 1]$. On pose : $\theta = \operatorname{Arccos} \ell$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $a_k = \left\lfloor \frac{k\theta}{2\pi} \right\rfloor$.

a) Montrer que la suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.

b) Étudier : $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{k}$, puis montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!x) = \ell$ où : $x = 2\pi\,\widehat{a}$.

En d'autres termes, tout élément de $[-1, 1]$ est la limite d'une suite $\big(\cos(n!x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$. En sens inverse, est-il vrai que la suite $\big(\cos(n!x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$? C'est à cette question qu'on va maintenant chercher à répondre.

3) On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \geqslant 0$: $f_0(x) = e^x - 1$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$.

b) Déterminer une expression explicite de $f_n(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$.

c) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

4) a) Pour quelle suite de Cantor simple a est-il vrai que : $\widehat{a} = e$?

On utilise ci-dessous les notations de la question **1)** pour cette suite de Cantor.

b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!2\pi e) = 1$ en exploitant le résultat de la question **1)d)**.

c) Montrer que l'entier N_n a la même parité que $n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) En déduire que la suite $\big(\cos(n!\pi e)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

5) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\lim_{n\to+\infty} \cos(n!\pi r) = 1$. Qu'en déduit-on sur e ?

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $p_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \lfloor n!x \rfloor$, $a_n = p_n - np_{n-1}$ et $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

a) Montrer que la suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.

b) Exprimer A_n en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que : $\widehat{a} = x$.

d) Montrer que x est rationnel si et seulement si a est nulle à partir d'un certain rang.

La fin de ce devoir est facultative.

7) Soient $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de Cantor **DISTINCTES**. On fait l'hypothèse que : $\widehat{a} = \widehat{b}$. Par hypothèse, on peut noter m le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel : $a_k \neq b_k$, et quitte à permuter les rôles de a et b, on peut supposer : $b_m < a_m$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}$.

Les questions qui suivent consistent à exploiter au mieux le résultat de la question **1)c)**.

a) Montrer que : $a_m = b_m + 1$.

b) En déduire que : $\widehat{a} = A_m$ et $\widehat{b} = B_m + \frac{1}{m!}$.

c) En déduire que $\widehat{a}$ est rationnel et que pour tout $k \geqslant m+1$: $a_k = 0$ et $b_k = k-1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *développement de Cantor de x* toute suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour laquelle : $\widehat{a} = x$. Au lieu de représenter x par un développement décimal illimité avec des puissances de 10, on le représente ici par un développement à base de factorielles. La question **6)c)** montre que tout réel possède un développement de Cantor.

8) Le développement de Cantor d'un réel est-il unique ?