Toute matrice est semblable à sa transposée

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **7)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On souhaite montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

1 Préliminaires et exemples

1) a) Montrer que toute matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

b) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A et B semblables, ainsi que B et $B^\top$. Montrer que A et $A^\top$ sont semblables.

c) Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose A et $A^\top$ semblables, ainsi que B et $B^\top$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à sa transposée.

2) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si f et g commutent, $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice NON diagonale avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.
On s'intéresse à l'équation $PA^\top = AP$, notée $\bigstar$, d'inconnue $P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{K}$.

a) Montrer qu'$\bigstar$ est équivalente à un système de deux équations scalaires.

b) En déduire qu'$\bigstar$ possède au moins une solution dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

4) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à sa transposée.

2 Similitude et changement de corps

Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, deux relations de similitude coexistent a priori sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peuvent être semblables sur $\mathbb{R}$: $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad B = P^{-1}AP$ et semblables sur $\mathbb{C}$: $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad B = P^{-1}AP$, et à l'évidence, si elles le sont sur $\mathbb{R}$, elles le sont sur $\mathbb{C}$. Qu'en est-il réciproquement ?

5) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles $U + iV$ est inversible et $AU = UB$ et $AV = VB$.

b) Montrer que la fonction $z \longmapsto \det(U + zV)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est polynomiale et non identiquement nulle.

c) En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Pour prouver que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable sur $\mathbb{R}$ à sa transposée, il suffit ainsi de montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à sa transposée.

3 CAS DES MATRICES NILPOTENTES

Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p.

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à N. Comme $g^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)}$, on peut se donner un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ non nul pour lequel $g^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, puis poser $u_k = g^{p-k}(u)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

6) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, puis que $p \leqslant n$.

7) Montrer que si $p = n$, alors N et $N^\top$ sont semblables.

8) On suppose à présent que $p \leqslant n-1$ et on complète la famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ en une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k^\star$ la $k^{\text{ème}}$ forme coordonnée relative à cette base et on pose pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:
$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{p} u_1^\star\big(g^{k-1}(x)\big)\, u_k.$$

a) Montrer que π est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

b) Calculer $\pi(u_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

c) En déduire que π est un projecteur de rang p de $\mathbb{K}^n$.

d) Montrer que g et π commutent.

e) En déduire que dans une certaine base de $\mathbb{K}^n$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$ avec $N_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $N_2 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ nilpotentes.

9) Montrer par récurrence sur n que toute matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

4 CAS GÉNÉRAL

On démontre le théorème étudié en toute généralité par récurrence sur n.

Initialisation : Toute matrice carrée de taille 1 est égale donc semblable à sa transposée.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On fait l'hypothèse que toute matrice carrée de taille inférieure ou égale à $n-1$ est semblable à sa transposée. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

10) Montrer que f possède une *valeur propre* λ, i.e. que $\operatorname{Ker}\big(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\big) \neq \big\{0_{\mathbb{C}^n}\big\}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. On pourra d'abord redémontrer que f possède un polynôme annulateur non constant grâce à l'application $P \longmapsto P(f)$ sur $\mathbb{C}[X]$.

11) On note m la multiplicité de λ dans P et Q l'unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ pour lequel $P = (X-\lambda)^m Q$. On pose en outre $g = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

a) Montrer que $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker} g^m \oplus \operatorname{Ker} Q(f)$.

b) En déduire que dans une certaine base de $\mathbb{C}^n$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $k_1 \geqslant 1$, $k_1 + k_2 = n$, $A_1 \in \mathscr{M}_{k_1}(\mathbb{C})$ et $A_2 \in \mathscr{M}_{k_2}(\mathbb{C})$.

c) Montrer que $A_1 - \lambda I_{k_1}$ est semblable à sa transposée, puis conclure.