Triplets pythagoriciens et autres délices matriciels

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Un calcul de puissances

Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2 Triplets pythagoriciens

On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ pour lesquels : $x^2+y^2=z^2$ et $x \wedge y = 1$, et $\mathscr{T}^+$ l'ensemble : $\mathscr{T}^+ = \mathscr{T} \cap \mathbb{N}^3$. Les éléments de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}^+$ seront vus indifféremment comme des triplets ou des colonnes.

On pose aussi : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on note $\mathscr{M}$ l'ensemble $\{A, AU, AV\}$.

1) **a)** Déterminer tous les triplets $(x,y,z) \in \mathscr{T}^+$ pour lesquels : $z \leqslant 1$.

b) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathscr{T}^+$, si : $z > 1$, alors : $x > 0$ et $y > 0$.

c) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$, si : $x^2+y^2=z^2$, alors $x \wedge y$ divise z.

d) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{T}$: $UX \in \mathscr{T}$ et $VX \in \mathscr{T}$.

2) Montrer que A est inversible et que son inverse est encore à coefficients entiers.

3) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{T}$. On pose : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = AX$. On veut montrer que : $AX \in \mathscr{T}$.

a) Montrer l'égalité : $x'^2 + y'^2 = z'^2$.

b) Montrer, en exploitant le résultat de la question **2)**, que : $x' \wedge y' = 1$.

On peut montrer de même — et on **admettra** — que pour tout $X \in \mathscr{T}$: $A^{-1}X \in \mathscr{T}$.

4) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{T}^+$: $AX \in \mathscr{T}^+$ et $AUX \in \mathscr{T}^+$.

On peut montrer de même — et on **admettra** — que pour tout $X \in \mathscr{T}^+$: $AVX \in \mathscr{T}^+$.

Le résultat de la question **4)** montre qu'on peut construire à partir de n'importe quel élément de $\mathscr{T}^+$ une foule d'autres éléments de $\mathscr{T}^+$. Par exemple, $\mathscr{T}^+$ contient X_0, donc aussi : AX_0, AUX_0 et AVX_0, et plus généralement : $M_1 \dots M_r X_0$ pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \dots, M_r \in \mathscr{M}$.

5) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{T}^+$. On suppose : $z > 1$ et on pose : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1}X$.

a) Montrer que : $z' < z$.

b) Montrer que : $z' > 0$.

c) Montrer que $\mathscr{T}^+$ contient X', UX' ou VX'.

6) Montrer par récurrence sur z que tout élément (x,y,z) de $\mathscr{T}^+$ peut être écrit sous la forme : $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où M est un produit — éventuellement vide — d'éléments de $\mathscr{M}$.