Un mimimum qui vient tout compliquer

Deux réels u_0 et u_1 étant donnés, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+2} = u_{n+1} + \min\{u_n, 1\}$.
On souhaite connaître, en fonction de u_0 et u_1, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

1) **a)** Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\min\{x, y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, quelle limite peut-elle avoir ?

2) Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si : $u_p = u_{p+1} = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$?

3) On suppose à présent que u_p et u_{p+1} sont positifs pour un certain $p \in \mathbb{N}$, strictement pour au moins l'un des deux.

a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) On suppose à présent que u_p et u_{p+1} sont négatifs pour un certain $p \in \mathbb{N}$, strictement pour au moins l'un des deux.

a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) Déterminer un réel φ pour lequel la suite $\left(\dfrac{u_n}{\varphi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement négatif.

5) On suppose finalement que u_n et u_{n+1} sont de signes opposés pour tout $n \in \mathbb{N}$, et quitte à remplacer u_0 par u_1, on peut même supposer : $u_0 > 0$ et $u_1 < 0$.

a) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et préciser sa limite.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même converge.

d) Déterminer un réel ψ pour lequel la suite $\left(\dfrac{u_n}{\psi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.