Un peu d'exponentielle, un peu de noyau

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Caractérisation de l'inversibilité par le noyau

Dans tout ce problème : $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition (Noyau d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *noyau de A* et on note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble $\left\{X \in \mathbb{K}^n \mid \quad AX = 0\right\}$ des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$.

1) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: $\quad \operatorname{Ker} A = \{0\}$.

2) Soient $U \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $V \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $W \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice pour laquelle $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

a) Montrer que A ne possède pas de colonne nulle.

b) En déduire l'existence de matrices $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ pour lesquelles $PA = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$.

c) Soit $Y \in \operatorname{Ker} B$. Trouver un scalaire $x \in \mathbb{K}$ pour lequel $\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

4) Déduire des résultats précédents que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, alors A est inversible.

On a finalement démontré le résultat important suivant.

Théorème (Caractérisation de l'inversibilité par le noyau)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

On sait déjà qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$. La caractérisation qui précède montre qu'il n'est en fait pas nécessaire de résoudre ce système **POUR TOUT SECOND MEMBRE**. La matrice A est inversible si le système **HOMOGÈNE** qui lui est associé n'a pas d'autre solution que la solution évidente 0.

5) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que si $AB = I_n$, A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

b) En déduire que si le produit AB est inversible, les matrices A et B le sont aussi.

Pour apprécier la saveur du résultat de la question **5)a)**, il ne faut pas oublier la définition de l'inversibilité. En principe, il faut connaître les deux égalités $AB = I_n$ et $BA = I_n$ pour savoir que A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Le résultat de la question **5)b)** est quant à lui la réciproque d'un théorème de cours selon lequel tout produit de matrices inversibles est une matrice inversible.

2 Exponentielle matricielle

Dans ce problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels non nuls.

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. On pose alors pour tous $z \in \mathbb{C}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$e_p(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad e_p(M) = \sum_{k=0}^{p} \frac{M^k}{k!}.$$

À présent, pour toute suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge* si la suite de coefficients $\big((A_p)_{ij}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$. On appelle alors *limite de* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$, notée $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p$, la matrice $\left(\lim\limits_{p\to+\infty} (A_p)_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Par exemple : $\quad \lim\limits_{p\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 3^{-p} \\ 2^{-p} & 1+4^{-p} \end{pmatrix} = I_2$.

On **admet** momentanément que la suite $\big(e_p(M)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers une matrice appelée l'*exponentielle de M* et notée e^M ou $\exp(M)$.

1) Calculer pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

a) $\exp\big(\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\big)$. **b)** $\exp\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **c)** $\exp\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer les relations : $\quad \cos\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \quad$ et $\quad \sin\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

b) En déduire $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

La suite de ce problème est facultative. On pose pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\quad \|M\| = n \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$.

4) Montrer que pour tous $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\quad \|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \quad$ et $\quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,.\,\|B\|$.

5) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Montrer que si la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} |u_k|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} u_k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi. On pourra observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 0 \leqslant x + |x| \leqslant 2\,|x|$, $\quad$ mais attention, la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est complexe.

6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On justifie dans cette question la bonne définition de e^M.

a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\|M^k\|}{k!}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée.

b) En déduire que la suite $\big(e_p(M)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

7) Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad \big\|e_p(A)\,e_p(B) - e_p(A+B)\big\| \leqslant e_p\big(\|A\|\big)\,e_p\big(\|B\|\big) - e_p\big(\|A\|+\|B\|\big)$.

b) En déduire que : $\quad \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$.

8) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, e^A est inversible et préciser son inverse.