Un théorème de Schur

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **8)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

On souhaite établir le résultat suivant, découvert en 1905 par le mathématicien Issai Schur.

Théorème (Théorème de Schur) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ dont tous les éléments commutent. Alors $\dim \mathscr{A} \leqslant \dfrac{n^2}{4}+1$.

1 Un exemple optimal

1) Dans cette question : $n = 2p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \lambda I_p & M \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix}$, λ décrivant $\mathbb{C}$ et M décrivant $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments commutent.

b) Montrer que $\dim \mathscr{A} = \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.

2) Proposer, dans le cas où n est impair et sans tout re-détailler, un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$ dont tous les éléments commutent.

2 Produits d'endomorphismes nilpotents qui commutent

3) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que si $E \neq \{0_E\}$, alors $\operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$.

À présent, soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent.

4) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $u_{k+1} \ldots u_n \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(u_{k+1} \ldots u_n)$ est stable par u_k.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} u_k|_{\operatorname{Im}(u_{k+1} \ldots u_n)} \neq \{0_E\}$.

c) En déduire que $\operatorname{rg}(u_{k+1} \ldots u_n) \geqslant \operatorname{rg}(u_k \ldots u_n) + 1$.

5) Montrer enfin que $u_1 \ldots u_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3 Polynômes d'endomorphismes et lemme des noyaux

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$.

6) **a)** Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in E$. Préciser, parmi les objets suivants, lesquels ont un sens et lesquels n'en ont pas :

$$P\big(f(x)\big), \qquad P(f)(x), \qquad P(f)(x)Q(f)(x), \qquad P(f)Q(f)(x).$$

b) Soient $g \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si f et g commutent, alors $\operatorname{Ker} P(f)$ est stable par g.

c) Montrer que l'application $P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'anneaux linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.

7) Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $PU + QV = 1$. On souhaite démontrer le *lemme des noyaux* selon lequel : $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f) = \mathrm{Ker}\,P(f) \oplus \mathrm{Ker}\,Q(f)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f)$ contient $\mathrm{Ker}\,P(f)$ et $\mathrm{Ker}\,Q(f)$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f) = \mathrm{Ker}\,P(f) + \mathrm{Ker}\,Q(f)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,P(f)$ et $\mathrm{Ker}\,Q(f)$ sont en somme directe.

La relation $PU + QV = 1$ s'appelle une *relation de Bézout* et traduit le fait que P et Q sont *premiers entre eux*, mais patience, nous introduirons ces notions en temps voulu.

8) **a)** Montrer que f possède un polynôme annulateur non constant P.

b) Montrer que pour une certaine racine $\lambda \in \mathbb{C}$ de P de multiplicité m : $\mathrm{Ker}\big(f - \lambda \mathrm{Id}_E\big)^m \neq \big\{0_E\big\}$.

On note alors le quotient Q de la division euclidienne de P par $(X-\lambda)^m$: $P = (X-\lambda)^m Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$.

c) En s'intéressant à la division euclidienne de Q par $X - \lambda$, montrer l'existence de deux polynômes $U_0, V_0 \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $(X-\lambda)\,U_0 + QV_0 = 1$.

d) En déduire l'existence de deux polynômes $U, V \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $(X-\lambda)^m U + QV = 1$.

Le lemme des noyaux montre finalement que $E = \mathrm{Ker}\big(f - \lambda \mathrm{Id}_E\big)^m \oplus \mathrm{Ker}\,Q(f)$.

4 Preuve du théorème de Schur

On va démontrer le théorème de Schur par récurrence sur la dimension n.

9) **Initialisation :** Montrer le théorème de Schur en dimension 1.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose le théorème de Schur vrai en dimension k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ dont tous les éléments commutent. On note r la dimension de $\mathscr{A}$ et on s'en donne une base $(a_1, \ldots a_r)$.

10) On suppose dans cette question qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E, non réduits à $\big\{0\big\}$ et stables par $a_1, \ldots, a_r$, pour lesquels $E = F \oplus G$. On pose $\mathscr{A}_F = \mathrm{Vect}\big(a_1|_F, \ldots, a_r|_F\big)$ et $\mathscr{A}_G = \mathrm{Vect}\big(a_1|_G, \ldots, a_r|_G\big)$.

a) Montrer que l'application $f \longmapsto \big(f|_F, f|_G\big)$ est linéaire de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}_F \times \mathscr{A}_G$ et déterminer son noyau.

b) Conclure.

On suppose désormais que E ne peut pas être décomposé sous la forme $E = F \oplus G$ de la question **10)**.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, d'après le résultat de la question **8)** appliqué à a_i, il existe un nombre complexe λ_i, un entier $m_i \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $\mathrm{Ker}\, b_i^{m_i} \neq \big\{0_E\big\}$ et $E = \mathrm{Ker}\, b_i^{m_i} \oplus \mathrm{Ker}\,Q(a_i)$ si on pose $b_i = a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_E$.

On pose également $\mathscr{B} = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_r)$ et $I = \mathrm{Im}\, b_1 + \ldots + \mathrm{Im}\, b_r = \Big\{ y_1 + \ldots + y_r \mid \ y_1 \in \mathrm{Im}\, b_1, \ \ldots, \ y_r \in \mathrm{Im}\, b_r \Big\}$. Il est clair que les éléments de $\mathscr{B}$ commutent, mais clair aussi que I est un sous-espace vectoriel de E, dont on se donne un supplémentaire quelconque S dans E.

On note enfin ρ l'application linéaire $f \longmapsto f|_S$ de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}(S, E)$.

11) **a)** Montrer que b_i est nilpotent pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

b) Montrer que $\dim \mathscr{A} \leqslant \dim \mathscr{B} + 1$.

c) Montrer que ρ est à valeurs dans $\mathscr{L}(S, I)$.

12) Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\rho$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est inclus dans $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant r} \mathrm{Im}\,(b_{i_1} \ldots b_{i_k} f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

13) Conclure.