UNE BIJECTION EXPLICITE DE $\mathbb{N}$ SUR $\mathbb{Q}$

On commence par quelques rappels.

- Soient $a, d \in \mathbb{N}^*$. On dit que d *divise* a ou que d est un *diviseur de* a si $a = dk$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, 6 divise 60 car : $60 = 6 \times 10$.
- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On dit que a et b sont *premiers entre eux* s'ils admettent 1 pour seul diviseur commun. Par exemple, 5 et 12 sont premiers entre eux car les diviseurs de 5 sont 1 et 5 et ceux de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
- Tout rationnel strictement positif s'écrit d'une et une seule façon sous la forme $\frac{p}{q}$, dite *forme irréductible*, où $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux.

On cherche à exhiber dans ce devoir une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$. Une telle bijection sera la preuve qu'on peut numéroter explicitement les rationnels.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et par les relations : $u_{2n+1} = u_n$ et $u_{2n+2} = u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer les dix premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note à présent f la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+^* \\ n & \longmapsto & \dfrac{u_{n+1}}{u_n}. \end{array}\right.$ Cette fonction est bien définie d'après **1)a)**, et la fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après **1)b)**.

3) Calculer $f(n)$ pour tout n entier compris entre 0 et 8.

4) **a)** Exprimer $f(2n+1)$ et $f(2n+2)$ en fonction de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(2n+1) > 1$ et $f(2n+2) < 1$.

5) **a)** Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, m et n ont la même parité si : $f(m) = f(n)$.

b) En déduire que $f\big|_{[\![0,n]\!]}$ est injective sur $[\![0,n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que f est injective sur $\mathbb{N}$ tout entier.

6) On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des rationnels strictement positifs qui ne possèdent aucun antécédent par f.

a) Interpréter la proposition : « $\mathscr{A}$ est vide ».

On suppose désormais $\mathscr{A}$ **NON** vide et on choisit dans $\mathscr{A}$ un élément $\frac{p}{q}$ sous forme irréductible pour lequel la somme $p + q$ est minimale.

b) Montrer que si $p > q$: $\dfrac{p-q}{q} \in \mathscr{A}$ et si $p < q$: $\dfrac{p}{q-p} \in \mathscr{A}$.

c) Conclure.

7) Construire proprement, à partir de f, une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.