Une équation fonctionnelle

Dans ce devoir, on note ★ l'équation fonctionnelle : $\forall x \geqslant 0, \quad 2f(x)^2 = f(2x)+1$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1 Quelques généralités sur les solutions d'★

1) Déterminer les solutions constantes d'★ et montrer que les fonctions cosinus et cosinus hyperbolique en sont solutions.

2) Que peuvent valoir les solutions d'★ en 0 ? Montrer par ailleurs que toute solution d'★ est minorée par -1.

2 Deux suites bien pratiques

On note φ la fonction définie pour tout $x \in [-1, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ et ψ la fonction $-\varphi$.

3) Montrer que $[0,1]$ est stable par φ et $[-1,0]$ stable par ψ.

On peut donc définir deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) \\ v_{n+1} = \psi(v_n). \end{cases}$

4) Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

5) Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) Déterminer l'unique point fixe de ψ dans $[-1,0]$, puis montrer qu'il est aussi l'unique point fixe de $\psi\circ\psi$.

b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

3 Solutions d'★ et valeur -1

On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des fonctions $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ positives ou nulles telles que pour tout $x \geqslant 0$: $g(2x) = 2g(x)$.

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une solution d'★. On fait l'hypothèse que f ne prend pas la valeur -1.

6) a) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x)\sqrt{\dfrac{2}{f(2x)+1}}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que soit : $\forall \geqslant 0, \quad f(x) = \sqrt{\dfrac{f(2x)+1}{2}}$, soit : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = -\sqrt{\dfrac{f(2x)+1}{2}}$.

7) Premier cas : On suppose que pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) = \sqrt{\dfrac{f(2x)+1}{2}}$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $f(x) \geqslant u_n$, puis que f est minorée par 1.

b) Montrer que : $\left(\mathrm{ch}|_{[0,+\infty[}\right)^{-1} \circ f \in \mathscr{G}$ et conclure.

8) Second cas : On suppose que pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) = -\sqrt{\dfrac{f(2x)+1}{2}}$.

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $v_{2n+1} \leqslant f(x) \leqslant v_{2n}$, puis que f est constante.

4 SOLUTIONS D'★ NON CONSTANTES MAJORÉES

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une solution d'★. On fait l'hypothèse que f est non constante et majorée. On souhaite montrer qu'alors f a un comportement oscillatoire qui la fait **RESSEMBLER** à la fonction cosinus.

9) Montrer que f est majorée par 1. On pourra s'intéresser aux suites de la forme $\left(f\left(2^n w\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w \in \mathbb{R}_+$.

10) Montrer l'égalité : $\quad \mathrm{Im}\, f = [-1, 1]$.

11) **a)** Soit $x \geqslant 0$ un antécédent de -1 par f. Montrer que -1 possède aussi un antécédent par f dans $[2x, +\infty[$.

b) En déduire que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation : $\quad y = f(x) \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède des solutions aussi grandes que l'on veut.

5 UNE MACHINE À CONSTRUIRE DES SOLUTIONS D'★

La dernière partie de ce devoir est facultative.

12) Montrer que pour toute fonction f solution d'★ et pour tout $g \in \mathscr{G}$, $f \circ g$ est encore une solution d'★.

On cherche à présent à comprendre mieux de quoi est constitué l'ensemble $\mathscr{G}$. On note pour cela $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $h \in \mathscr{C}\big([1, 2[, \mathbb{R}\big)$ positives ou nulles pour lesquelles : $\quad \lim\limits_{x\to 2} h(x) = 2\, h(1)$.

13) À toute fonction $h \in \mathscr{H}$, on associe la fonction $\widehat{h}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\widehat{h}(0) = 0 \qquad \text{et pour tous } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in \left[2^n, 2^{n+1}\right[: \quad \widehat{h}(x) = 2^n h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

a) Représenter graphiquement la construction de $\widehat{h}$ à partir de h.

b) Soit $h \in \mathscr{H}$. Pourquoi h est-elle bornée sur $[1, 2[$? En déduire que $\widehat{h}$ est continue en 0.

c) Montrer que pour tout $h \in \mathscr{H}$: $\quad \widehat{h} \in \mathscr{G}$.

d) Montrer que l'application $h \longmapsto \widehat{h}$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{G}$ de réciproque à expliciter.