UNE ÉQUATION POLYNOMIALE

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ fixés une fois pour toutes. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on dit que P est *solution* d'★ si : $\quad P\left(X^2\right) = P(X+a)P(X+b)$.

Quand on parle de racines dans ce problème, il s'agit toujours de racines dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. On **ADMET** que pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$: $\quad \overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}, \quad \overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q} \quad$ et $\quad \overline{P \circ Q} = \overline{P} \circ \overline{Q}$.

1) Déterminer les solutions d'★ constantes.

On note à présent $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions d'★ non constantes.

2) Montrer que tout élément de $\mathscr{E}$ est unitaire.

3) On suppose dans cette question que : $\quad a = b$.

- **a)** Soit $P \in \mathscr{E}$. Montrer que 0 est la seule racine de P en comparant le nombre de racines distinctes de $P(X+a)^2$ et le nombre de racines distinctes de $P\left(X^2\right)$.
- **b)** En déduire, en fonction de a, une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

4) Soient $P, Q \in \mathscr{E}$ de mêmes degrés. On pose : $\quad D(X) = P(X) - Q(X) \quad$ et $\quad R(X) = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$.

- **a)** Montrer que : $\quad D\left(X^2\right) = R(X) \quad$ et $\quad \deg(R) = \deg(P) + \deg(D)$.
- **b)** En déduire que : $\quad P = Q$.

5) Déduire du résultat de la question **4)** que si a et b sont réels : $\quad \mathscr{E} \subset \mathbb{R}[X]$.

6) On suppose dans cette question que : $\quad a = 0 \quad$ et $\quad b = -1$. $\quad$ Soit $P \in \mathscr{E}$.

- **a)** Montrer que pour toute racine α de P et pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.
- **b)** En déduire que pour toute racine α de P : $\quad \alpha = 0 \quad$ ou $\quad |\alpha| = 1$.
- **c)** En déduire que 0 n'est pas racine de P.
- **d)** Montrer que pour toute racine α de P : $\quad |\alpha + 1| = 1$.
- **e)** Montrer que : $\quad P = \left(X^2 + X + 1\right)^n \quad$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
- **f)** En déduire une description explicite de l'ensemble $\mathscr{E}$.

La fin du problème est consacrée à une description générale de l'ensemble $\mathscr{E}$. On suppose désormais $\mathscr{E}$ non vide.

7) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit.

8) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} b\right), \quad$ puis que pour tous $A, B \in \mathbb{C}[X]$:
$$A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(A - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} B\right).$$

9) Déduire du résultat de la question **8)** que pour tous $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad P^n \in \mathscr{E} \quad \Longrightarrow \quad P \in \mathscr{E}$.

10) Justifier l'existence d'un unique polynôme M de degré minimal dans $\mathscr{E}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines distinctes de M et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives, de sorte que : $\quad M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$.

11) Soit $P \in \mathscr{E}$. On pose : $\quad d = \deg(P) \wedge \deg(M) \quad$ et on note s et t les deux entiers premiers entre eux pour lesquels : $\deg(P) = ds \quad$ et $\quad \deg(M) = dt$.

- **a)** Montrer que : $\quad P^t = M^s, \quad$ puis que : $\quad P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{p_i} \quad$ pour certains $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}^*$.

  On pose alors : $\quad Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i \wedge p_i}$.
- **b)** Montrer que : $\quad P = Q^s \quad$ et $\quad M = Q^t, \quad$ puis que P est une puissance de M.

Les résultats des questions **7)** et **11)** montrent finalement que : $\quad \mathscr{E} = \left\{ M^n \mid \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$.