UNE FORMULE D'EULER

On rappelle que la fonction *cotangente*, notée cotan, est par définition la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On souhaite établir le résultat suivant :

Théorème (Une formule d'Euler) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \pi \,\mathrm{cotan}(\pi x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$.

1) Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.

- **a)** Pourquoi f possède-t-elle un maximum m ? Montrer que si m est atteint en un certain $a \in [0,1]$: $\quad m = f\left(\dfrac{a}{2}\right)$.
- **b)** En déduire que : $\quad m = f(0)$.
- **c)** En déduire que f est constante.

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \sigma_n(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé.

- **a)** Montrer que la suite $\big(\sigma_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone à partir d'un certain rang.
- **b)** Montrer que pour tout k assez grand : $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{k^2 - x^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. $\quad$ Quel rang peut-on choisir si $x \in \,]-1,1[$?
- **c)** En déduire que la suite $\big(\sigma_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera $\sigma(x)$ sa limite.

3) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{x+k}$.

- **b)** Simplifier : $\quad \sigma_n(x+1) - \sigma_n(x) \quad$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, puis en déduire que σ est 1-périodique.

4) **a)** Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]-1,1[$ avec $p \geqslant n$: $\quad \big|\sigma_p(x) - \sigma_n(x)\big| \leqslant \dfrac{2|x|}{n}$.

- **b)** En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]-1,1[$: $\quad \big|\sigma(x) - \sigma_n(x)\big| \leqslant \dfrac{2|x|}{n}$.
- **c)** Soit $a \in \,]0,1[$ fixé. Montrer que σ est continue en a en revenant à la définition de la limite et en remarquant que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]0,1[$: $\quad \big|\sigma(x) - \sigma(a)\big| \leqslant \big|\sigma(x) - \sigma_n(x)\big| + \big|\sigma_n(x) - \sigma_n(a)\big| + \big|\sigma(a) - \sigma_n(a)\big|$.
- **d)** En déduire que σ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On pose à présent pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \varphi(x) = \pi \,\mathrm{cotan}(\pi x) - \sigma(x)$.

5) **a)** Simplifier : $\quad \displaystyle\int_0^{\pi x} t \sin t \,\mathrm{d}t \quad$ pour tout $x \in \,]-1,1[$, puis montrer que : $\quad \big|\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)\big| \leqslant \dfrac{\pi^3 |x|^3}{3}$.

- **b)** En déduire la limite : $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\pi \,\mathrm{cotan}(\pi x) - \dfrac{1}{x}\right)$.
- **c)** Déterminer la limite : $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\sigma(x) - \sigma_1(x)\big)$.
- **d)** En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0.

6) **a)** Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \sigma_n\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sigma_n\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\sigma_{2n}(x) + \dfrac{2}{x+2n+1}$.

- **b)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $\quad \varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

7) Montrer finalement que φ est la fonction nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

ATTENTION, L'EXPLICATION QUI SUIT MANQUE TOUT À FAIT DE RIGUEUR ET NE VOUS EST DONNÉE QU'À TITRE DE CURIOSITÉ.

En particulier, les sommes infinies que je vais écrire mériteraient de longues justifications qui dépassent vos connaissances.

Nous avons prouvé une formule de Taylor pour les polynômes. Nous verrons plus tard d'autres formules de Taylor, et j'affirme que si on note g la fonction $x \longmapsto \pi x\ \mathrm{cotan}(\pi x)$, alors pour tout $x \in]-1,1[$: $\quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$. $\quad$ On ne peut pas écrire un tel résultat pour toute fonction, mais en tout cas on le peut pour g.

Après calcul des premières dérivées de g en 0 : $\quad g(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3}\ x^2 - \frac{\pi^4}{45}\ x^4 - \frac{2\pi^6}{945}\ x^6 - \frac{\pi^8}{18900}\ x^8 + \ldots \quad \clubsuit$

Nous aurons aussi besoin d'une autre formule que vous connaissez bien — la formule des sommes géométriques. En faisant tendre le nombre de termes vers $+\infty$, on en tire que pour tout $t \in]-1,1[$: $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$.

La formule d'Euler nous apprend par ailleurs que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^2-k^2} = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2} = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n}.$$

Permutons à présent les deux symboles de sommation ainsi obtenus. Une telle opération nous est bien sûr familière pour des sommes finies. Elle n'est pas toujours possible pour des sommes infinies, mais ici il se trouve qu'elle l'est.

$$g(x) = 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{k}\right)^{2n} = 1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right)x^{2n} = 1-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)x^2-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\right)x^4-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}\right)x^6-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^8}\right)x^8+\ldots \quad \spadesuit$$

Conclusion d'après $\clubsuit$ et $\spadesuit$:

$$\boxed{1 - \frac{\pi^2}{3}\ x^2 - \frac{\pi^4}{45}\ x^4 - \frac{2\pi^6}{945}\ x^6 - \frac{\pi^8}{18900}\ x^8 + \ldots = 1-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)x^2-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\right)x^4-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}\right)x^6-2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^8}\right)x^8+\ldots}$$

De chaque côté de cette égalité, ce sont deux « expressions polynômiales infinies » que nous trouvons. Ce ne sont donc pas des polynômes à proprement parler que nous venons d'écrire, mais ce qu'on appelle des *développements en série entière*. Un résultat élémentaire sur ce thème montre qu'on peut, comme avec les polynômes, identifier les coefficients sur de tels développements. Quelle conclusion ?

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}\ldots$$

On pourrait même comprendre de façon générale comment sont construits les coefficients devant $\pi^2, \pi^4, \pi^6, \pi^8\ldots$, mais cela demande d'autres idées. Remarquez bien qu'on n'atteint pas avec cette méthode les sommes : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^5}\ldots$ De fait, les mathématiciens en savent toujours très peu sur ces nombres !