UNE SUITE CORIACE

On s'intéresse dans ce devoir à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fixée une fois pour toutes pour laquelle : $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$.

1 D'ABORD LA CONVERGENCE

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

2) On suppose dans cette question que $u_N \leqslant u_{N+1} \leqslant u_{N+2}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant N}$ est croissante.

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On **ADMET** que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également si $u_N \geqslant u_{N+1} \geqslant u_{N+2}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ — la preuve est la même.

3) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne satisfait ni l'hypothèse de la question **2)**, ni l'hypothèse analogue mentionnée ci-dessus.

a) Montrer que $u_n \neq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On suppose à présent $u_0 < u_1$.

b) Montrer que $u_{2n} < u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} < u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Simplifier $\dfrac{u_{n+2} - u_n}{u_{n+3} - u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On **ADMET** que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également si $u_0 > u_1$ — la preuve est la même.

En résumé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans tous les cas.

2 UN PEU PLUS LOIN JUSQU'AU PROCHAIN OBSTACLE

On suppose dans toute la suite de ce devoir que u_0 et u_1 sont supérieurs ou égaux à 4, mais pas tous les deux égaux à 4.

On pose alors $\delta_n = \dfrac{\sqrt{u_n} - 2}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence facile montre que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

4) a) Exprimer $\delta_n + \delta_{n+1}$ en fonction de δ_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire que $4\delta_{n+2} \leqslant \delta_n + \delta_{n+1}$.

b) Montrer que le polynôme $4X^2 - X - 1$ possède une et une seule racine α dans $]0,1[$, puis vérifier sans calculatrice que $4\alpha^2 > 1$.

b) Montrer l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ pour lequel $\delta_n \leqslant M\alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \dfrac{\delta_n}{\alpha^n}$ et $\widetilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + 4\alpha^2\varepsilon_{n+1}$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\widetilde{\varepsilon}_n - \widetilde{\varepsilon}_{n+1} = 2\alpha^{n+4}\varepsilon_{n+2}^2$.

b) En déduire que $(\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\widetilde{\varepsilon}_n - \widetilde{\varepsilon}_{n+1} \leqslant M\alpha^n\widetilde{\varepsilon}_{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\widetilde{\varepsilon}_0 \leqslant e^{\frac{M}{(1-\alpha)}}\,\widetilde{\varepsilon}_n$, puis que la limite de $(\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

3 Saut périlleux et atterrissage

Cette dernière partie est facultative.

7) Soit $\eta \in]-1,1[$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - \eta x_n) = 0$.

a) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-N-1} \eta^k (x_{n-k} - \eta x_{n-k-1})$ pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $n > N$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ en revenant à la définition de la limite.

8) Soit $\eta \in]-1,1[$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer, en **APPLIQUANT** le résultat de la question **7)**, que si $(y_{n+1} - \eta y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

9) **a)** Montrer que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

b) En déduire finalement que $\left(\dfrac{u_n - 4}{\alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

En notant ℓ la limite finale ainsi obtenue : $u_n - 4 \approx \ell \alpha^n$ pour n assez grand, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4 à la manière d'une suite géométrique de raison $\alpha \approx 0,64$. Autant dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge rapidement vers 4.