Valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs

1 Introduction à la fonction ζ

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$, on pose : $\displaystyle \zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$.

1) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$: $\displaystyle \zeta_n(s) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$.

b) En déduire que la suite $\big(\zeta_n(s)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente pour tout $s > 1$.

On peut ainsi poser pour tout $s > 1$: $\displaystyle \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. On s'intéresse dans ce problème aux nombres $\zeta(2p)$, p décrivant $\mathbb{N}^*$.

2) On appelle *cotangente* et on note cotan la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

a) Que vaut l'ensemble de définition de la fonction cotangente ? Les fonctions cotangente et $x \longmapsto \dfrac{1}{\tan x}$ sont-elles égales ?

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\operatorname{cotan} x \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sin x}$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{\pi^{2p}\,\Sigma_{n,p}}{(2n+1)^{2p}} \leqslant \zeta_n(2p) \leqslant \dfrac{\pi^{2p}\,\Sigma'_{n,p}}{(2n+1)^{2p}}$, où l'on a posé :

$$\Sigma_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^{2p} \frac{k\pi}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \Sigma'_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^{2p} \dfrac{k\pi}{2n+1}}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

a) En transformant $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^{2n+1}$, déterminer explicitement un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$P_n\left(\operatorname{cotan}^2 x\right) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1} x}.$$

b) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa forme scindée.

2 Formules de Newton

Soit $\displaystyle P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de racines complexes $z_1, \ldots, z_n$ comptées avec multiplicité. On pose : $\displaystyle s_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On souhaite prouver les relations suivantes :

> **Théorème (Formules de Newton)** Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$: $\displaystyle \sum_{k=0}^{p} a_{n-p+k} s_k = (n-p) a_{n-p}$.

On pose dans ce but : $\displaystyle Q = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$ et $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$.

4) a) Vérifier les égalités : $\displaystyle Q = a_n \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i X)$ et $\displaystyle S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - (z_i X)^{n+1}}{1 - z_i X}$.

b) Montrer que : $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - z_i X} = n - \frac{XQ'}{Q}$.

c) En déduire que le polynôme $SQ - nQ + XQ'$ est divisible par X^{n+1}.

d) Conclure.

3 Retour à la fonction ζ

5) a) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant p$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{2n+1}{2p-2k+1}\Sigma_{n,k} = p\binom{2n+1}{2p+1}$.

b) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) En déduire par récurrence que la suite $\displaystyle\left(\frac{\Sigma_{n,p}}{(2n+1)^{2p}}\right)_{n\geqslant p}$ est convergente de limite rationnelle pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\alpha_{2p} = (2p)! \times \lim_{n\to+\infty}\frac{\Sigma_{n,p}}{(2n+1)^{2p}}$.

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{2p+1}{2k}\alpha_{2k} = p$.

e) Calculer α_2, α_4 et α_6.

6) a) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\Sigma'_{n,p} = n + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\Sigma_{n,k}$ en partant de la relation : $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^p = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\Sigma'_{n,p}}{(2n+1)^{2p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\Sigma_{n,p}}{(2n+1)^{2p}}$.

7) a) Montrer enfin que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\zeta(2p) = \frac{\pi^{2p}}{(2p)!}\,\alpha_{2p}$.

b) En déduire $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

On peut retenir de ce résultat que le réel $\zeta(2p)$ est pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ de la forme « $\pi^{2p} \times$ un rationnel », et que les rationnels en question peuvent être calculés facilement de proche en proche.