

# ENDOMORPHISMES ÉCHANGEURS

## (INDICATIONS/ALERTE)

### 1 IMPLICATION (i) $\implies$ (ii)

1)

### 2 CAS D'UN AUTOMORPHISME

2) a)

b) Il est important de savoir réécrire une égalité du type :  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ , où  $f \in \mathcal{L}(E,F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F,G)$ , en termes de noyau et d'image. Ensuite, raisonner sur les dimensions.

c)

### 3 RÉDUCTION AU CAS NILPOTENT

3)

4) a)

b) Par l'absurde. Raisonner sur les dimensions et profiter du fait que :  $\dim \text{Ker } u > 0$  si  $u$  n'est pas injectif.

c) Pour les noyaux, récurrence !

d)

e) Pourquoi  $u|_{\text{Ker } u^p}$  et  $u|_{\text{Im } u^p}$  sont-ils bien des endomorphismes de  $\text{Ker } u^p$  et  $\text{Im } u^p$  respectivement ?

5) a)

b) Petite astuce :  $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{2p}$  et  $\text{Im } u^p = \text{Im } u^{2p}$ .

c) Utiliser le résultat de la question 2).

d)

### 4 CAS NILPOTENT

6) a)

b)

c)

7) a)

b)

c)

8) a)

b)

9)

10) a)

b)

11)