Les entiers d'Eisenstein (indications/alertes)

1) On est d'accord qu'il est plus facile de montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{j}]$ est un **sous**-anneau ?

2) **a)**
b) Ne pas oublier que $\mathrm{U}\big(\mathbb{Z}[\mathrm{j}]\big)$ est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\mathrm{j}]$, donc dont l'inverse appartient à $\mathbb{Z}[\mathrm{j}]$.

c) Pour tout $z = a + \mathrm{j}b \in \mathrm{U}\big(\mathbb{Z}[\mathrm{j}]\big)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, l'égalité : $N(z) = 1$ limite drastiquement le nombre de couples (a, b) envisageables.

3) **a)**
b)

4) **a)**
b)
c) Appliquer le résultat de la question **b)** à $\dfrac{x}{y}$.

5) **a)**
b) Écrire la division euclidienne de x par d.
c)

6)

7) **a)**
b) Déduire de **a)** que p n'est pas irréductible, i.e. que : $p = ab$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}[\mathrm{j}] \setminus \mathrm{U}\big(\mathbb{Z}[\mathrm{j}]\big)$.

c) Après les avoir écrits sous forme « $a + b\mathrm{j}$ », montrer que l'un des entiers d'Eisenstein z, $\mathrm{j}z$ et j^2z est de la forme $r + 2\mathrm{j}s$ pour certains $r, s \in \mathbb{Z}$.

8) **a)** Ne pas oublier de montrer d'abord que φ est à valeurs dans E.

b)
c) Montrer que la classe d'équivalence de x pour $\sim$ est de cardinal 3 pour tout $x \in E \setminus F$.

d) F est l'ensemble des solutions d'une équation du second degré à coefficients dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, et comment résout-on les équations du second degré en général ?

e)