Devoir surveillé

1 Les questions **1)**, **2)** et **3)** sont indépendantes.

1) Déterminer un équivalent simple de : $\lfloor n^2 + n\sin n \rfloor \times \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{n+\ln n} - \sqrt{n}}{n(n+1)}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n \,\mathrm{sh}\, \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3) Étudier localement au voisinage de 0 la fonction $x \overset{\psi}{\longmapsto} \dfrac{\ln(1+x)}{x} - \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ (prolongement par continuité, dérivabilité et présence d'un extremum local ou d'un point d'inflexion).

---

2 On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. L'image et le noyau de M sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

---

3 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$.

b) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

2) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$.

3) a) Montrer que : $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

b) En déduire un développement asymptotique de u_n de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à préciser. **Attention :** $\lambda \neq \dfrac{1}{8}$!

---

4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que f est *nilpotent* si : $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$.

1) Décomposition de Fitting : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On souhaite établir le résultat suivant, appelé la *décomposition de Fitting de E par rapport à f* : $\exists\, p \in [\![1,n]\!]/ \quad E = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Ker}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.

b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $k \in [\![1,n]\!]$ pour lequel : $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$. Cet entier que l'on notera p est appelé l'*indice de f*.

c) Montrer que pour tout $k \geqslant p$: $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^p$.

d) En déduire que : $E = \mathrm{Ker}\, f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$.

e) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, f^k$ et que p est le plus petit entier k compris entre 1 et n pour lequel : $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$.

2) Quelques exemples :

a) Calculer l'indice de f si : $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou si f est un automorphisme de E.

b) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que l'indice de f est le plus petit entier naturel k pour lequel : $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En déduire que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

c) Calculer l'indice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Un résultat de concavité : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\delta_k = \dim \operatorname{Ker} f^k - \dim \operatorname{Ker} f^{k-1}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\delta_k = \dim\left(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^{k-1}\right)$.

b) En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ce résultat montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\dim \operatorname{Ker} f^{k+1} + \dim \operatorname{Ker} f^{k-1}\right)$. Géométriquement, cela signifie par analogie avec le cadre des fonctions que la suite $\left(\dim \operatorname{Ker} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, en plus d'être croissante, est *concave*.

c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $k\delta_k \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant k \dim \operatorname{Ker} f$.

d) En déduire que si f est nilpotent d'indice au plus $n-1$: $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$.

4) Un dernier exemple pour la route : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note Δ l'application $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son noyau et son image.

b) Montrer que Δ est nilpotent et préciser son indice de nilpotence.

---

5 **(Très difficile)** Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir VRAIMENT TRÈS BIEN RÉUSSI tout le reste !

Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
